МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МІЖНАРОДНИЙ ЕКОНОМІКО-ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ АКАДЕМІКА СТЕПАНА ДЕМ'ЯНЧУКА

Р.М.ЛІТНАРОВИЧ

ОСНОВИ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

АНАЛІЗ ІНДИВІДУАЛЬНОГО РИНКУ

Рівне, 2010

Літнарович Р.М. Основи наукових досліджень. Аналіз індивідуального ринку.МЕГУ, Рівне, 2010,- 76 с.

Приведена методологія написання кваліфікаційної роботи освітньо-кваліфікаційного рівня «Магістр».
Для студентів-магістрантів МЕГУ.

Відповідальний за випуск:
Й.В.Джунь, доктор фізико-математичних наук, професор

ЗМІСТ

ВСТУП

Відтоді як економіка стала серйозною самостійною наукою, дослідники намагаються спрогнозувати ту чи іншу ситуацію, передбачити майбутні значення економічних показників, запропонувати інструменти зміни ситуації в бажаному напрямку.

Одним з головних напрямів розвитку економіки є застосування ефективних наукових методів аналізу й оптимізації складних економіко-організаційних систем. Серед наукових методів, які застосовуються в економіці, науці і техніці, особливе місце займають методи моделювання. Моделювання – це процес створення (і дослідження) моделі.

Під моделлю деякого об’єкта розуміється сукупність найважливіших властивостей об’єкта процесу чи явища , яка володіє суттєвими для цілей моделювання властивостями і в рамках цих цілей повністю змінює вихідний об’єкт, процес чи явище.

Найзагальнішим методом досліджень, та таким що найбільше використовується в науці , зокрема в кібернетиці і економіці, можна назвати процес створення математичної моделі, тобто математичне моделювання. Неможливо уявити собі сучасну науку без широкого застосування математичного моделювання, суть якого полягає в заміні досліджуваного об’єкта його «образом» - математичною моделлю – і подальшому вивченні моделі за допомогою відповідних обчислювально-логічних алгоритмів на ЕОМ.

Робота не з об’єктом (явищем, процесом), а з його моделлю дає можливість без істотних затрат і відносно швидко дослідити його властивості і поведінку у різних ситуаціях. Обчислювальні (комп’ютерні , стимуляційні, імітаційні) експерименти з моделями об’єктів дозволяють вивчати об’єкти з достатньою повнотою, недоступною для чисто теоретичних досліджень.

В економіці математичне моделювання застосовують при вивченні складних економічних явищ.

РОЗДІЛ 1. Постановка проблеми і теоретичні основи

1.1. Постановка проблеми досліджень

На певний вид товару [10, с.188] таблиця попиту має вигляд

Таблиця 1. Ціна товару pi в у.г.о. і кількість товару di, проданого за певний період по ціні pi

pi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
di	8.3	7.28	6.38	6.3	5.49	4.7	3.7	3.2	2.5	1.96	1.56

Приймаючи робочу гіпотезу, що кількість товару di, проданого за певний період по ціні pi апроксимується поліномом другого степеня

$$\mathrm{Y} = c + bX + \mathrm{a}\mathrm{X}^2 \quad , \qquad (1.1.1)$$

або

$$D' = \mathrm{a}_0 + \mathrm{a}_1\mathrm{p} + \mathrm{a}_2\mathrm{p} \quad , \qquad (1.1.2)$$

побудувати методом найменших квадратів математичну модель на основі приведених в табл.1.1 емпіричних даних.

При цьому, необхідно:

1. Отримати систему нормальних рівнянь для оцінки нелінійної парної регресії у вигляді многочлена другого порядку.
2. **Побудувати математичну модель.**
3. Встановити адекватність даної моделі емпіричним даним.
4. Знайти коефіцієнт еластичності для всіх значень цін.
5. Дослідити проміжки цін зростання та спадання товарообігу в грошовому вираженні.

6. Визначити ціну на товар, за якої товарообіг у грошовому вираженні буде максимальним.
7. Проаналізувати проміжки цін зростання та спадання прибутку.
8. Провести оцінку ціни на товар, за якої прибуток буде максимальним, та встановити його значення.
9. Доказати теорему , на основі якої провести оцінку точності зрівноваженої функції для кожного виду товару.
10. Апробувати формулу оцінки точності зрівноваженої функції через розрахунок допоміжної матриці Q’ і порівняти результати контрольних обчислень.

Побудувати графіки:

1. Статистичних даних.
2. Лінії регресії.
3. Товарообігу в грошовому вираженні для статистичних даних.
4. Лінії еластичності.
5. Товарообігу в грошовому вираженні для розрахункових значень.
6. Собівартості товару в залежності від обсягу випуску.
7. Прибутку в залежності від обсягу випуску.
8. Проілюструвати емпіричні дані з результатами зрівноваженої моделі.
9. Порівняти результати зрівноважені моделі з абсолютними похибками, встановленими процедурою методу найменших квадратів.
10. Привести графік обернених ваг значень зрівноваженої функції і їх середніх квадратичних похибок.

1.2. Теоретичні основи

Математична модель результатів економічного експерименту виражається квадратичним поліномом виду

$$y = ax^2 + bx + c\,, \qquad (1.2.1)$$

або

$$y = ax^2 + bx \quad , \qquad (1.2.2)$$

або $$y = ax^2 \qquad (1.2.3)$$

Утворимо систему n початкових рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{aligned} & ax_1^2 + bx_1 + c - y_1 = \varepsilon_1, \\ & ax_2^2 + bx_2 + c - y_2 = \varepsilon_2, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & ax_n^2 + bx_n + c - y_n = \varepsilon_n. \end{aligned} \qquad (1.2.4)$$

Застосувавши вимогу найменших квадратів

$$[\varepsilon\varepsilon] = [(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2] = \min\,. \qquad (1.2.5)$$

будемо мати три нормальних рівняння з трьома невідомими

$$\begin{aligned} & a[x^4] + b[x^3] + c[x^2] = [x^2 y], \\ & a[x^3] + b[x^2] + c[x] = [xy], \\ & a[x^2] + b[x] + c \cdot n = [y]. \end{aligned} \qquad (1.2.6)$$

Символом [ ] позначена сума по Гаусу.

Рішення цих рівнянь приводить до визначення невідомих коефіцієнтів

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$a = \frac{[x^2y](n[x^2]\overset{A}{-}[x][x]) + [xy]([x][x^2]\overset{B}{-}n[x^2]) + [y]([x][x^3]\overset{C}{-}[x^2][x^2])}{n([x^2][x^4]\underset{D}{-}[x^3][x^3]) + [x]([x^2][x^3]\underset{E}{-}[x][x^4]) + [x^2]([x][x^3]\underset{C}{-}[x^2][x^2])},$$

$$b = \frac{[x^2y](n[x^2]\overset{B}{-}n[x^3]) + [xy](n[x^4]\overset{E}{-}[x^2][x^2]) + [y]([x^2][x^3]\overset{E}{-}[x][x^4])}{n([x^2][x^4]\underset{D}{-}[x^3][x^3]) + [x]([x^2][x^3]\underset{E}{-}[x][x^4]) + [x^2]([x][x^3]\underset{C}{-}[x^2][x^2])}, \qquad (1.2.7)$$

$$c = \frac{[x^2y]([x][x^3]\overset{C}{-}[x^2][x^2]) + [xy]([x^2][x^3]\overset{E}{-}[x][x^4]) + [y]([x^2][x^4]\overset{D}{-}[x^3][x^3])}{n([x^2][x^4]\underset{D}{-}[x^3][x^3]) + [x]([x^2][x^3]\underset{E}{-}[x][x^4]) + [x^2]([x][x^3]\underset{C}{-}[x^2][x^2])}.$$

Зрівноважене рівняння буде

$$\varphi(x) = ax^2 + bx + c \quad . \qquad (1.2.8)$$

Склавши різниці $\varphi(x_i) - y_i = \varepsilon_i$, де y_i – визначені значення, а ε_i – відхилення визначених значень y_i від їх ймовірних значень, отримаємо перше представлення про точність виконаних робіт.

Контрольна формула обчислення коефіцієнтів легко виводиться із (4.4) (4.6) і умови $[\varepsilon\varepsilon] = \min$.

$$[y^2] - a[yx^2] - b[yx] - c[y] = [\varepsilon\varepsilon] \qquad (1.2.9)$$

Замітимо, що корені рівняння (1.2.8) не виражаються простими величинами, як для випадку прямолінійної залежності.

Обчислення коефіцієнтів b і c можна значно спростити, якщо виразити їх із (1.2.6) через коефіцієнт a

$$b = \frac{n[yx] - [y][x]}{n[x^2] - [x][x]} + a\frac{[x][x^2] - n[x^3]}{n[x^2] - [x][x]}\,, \qquad (1.2.10)$$

$$c = \frac{[y][x^2] - [x][xy]}{n[x^2] - [x][x]} + a\frac{[x][x^3] - [x^2][x^2]}{n[x^2] - [x][x]}\,. \qquad (1.2.11)$$

Введемо позначення

$$A=n[x^2]-[x][x];B=[x][x^2]-n[x^2];C=[x][x^3]-[x^2][x^2];$$

$$D=[x^2][x^4]-[x^3][x^3];E=[x^2][x^3]-[x][x^4];F=n[x^4]-[x^2][x^2].(1.2.12)$$

Тоді формули (1.2.7) будуть

$$a=\frac{[x^2y]\cdot A+[xy]\cdot B+[y]\cdot C}{n\cdot D+[x]\cdot E+[x^2\cdot C]},$$

$$b=\frac{[x^2y]\cdot B+[xy]\cdot F+[y]\cdot E}{n\cdot D+[x]\cdot E+[x^2]\cdot C}, \qquad (1.2.13)$$

$$c=\frac{[x^2y]\cdot C+[xy]\cdot E+[y]\cdot D}{n\cdot D+[x]\cdot E+[x^2]\cdot C}.$$

Підставивши (1.2.10), (1.2.11) у (1.2.8), отримаємо

$$\varphi(x)=ax^2\left\{\frac{n[yx]-[x][y]+a[x][x^2]-n[x^3]}{n[x^2]-[x][x]}\right\}x+$$
$$+\frac{[y][x^2]-[x][yx]+a[x][x^3]-[x^2][x^2]}{n[x^2]-[x][x]}. \qquad (1.2.14)$$

Отримана крива завжди проходить через точки

$$\left(0;\frac{a[x][x^3]-[x^2][x^2]+[y][x^2]-[x][yx]}{n[x^2]-[x][x]}\right),$$

$$\left(\frac{[x]}{n};a\frac{[x][x]-n[x^2]}{n^2}+\frac{[yx]}{x}\right), \qquad (1.2.15)$$

$$\left(\frac{[x2]}{[x]};a\frac{[x2][x2]-[x][x3]}{[x][x]}+\frac{[yx]}{[x]}\right).$$

1.3. Поступальне переміщення початку координат в точку арифметичної середини

Всі приведені формули суттєво спрощуються, якщо перемістити початок координатної системи в точку

$$\left(\frac{[x]}{n};\frac{[y]}{n}\right).$$

Нові координати будуть виражатися через старі наступним чином

$$x'=x-\frac{[x]}{n}, \qquad (1.3.1)$$
$$y'=y-\frac{[y]}{n}.$$

При цьому $[x']=[y']=0$

Формули (1.2.7) перетворюються до виду

$$a'=\frac{n([x'^2\cdot y'][x'^2]-[x'y'][x'^3])}{n([x'^2][x'^4]-[x'^3][x'^3])-[x'^2][x'^2][x'^2]},$$

$$b'=\frac{n([x'\cdot y'][x'^4]-[x'^2y'][x'^3])-[x'y'][x'^2][x'^2]}{n([x'^2][x'^4]-[x'^3][x'^3])-[x'^2][x'^2][x'^2]}, \qquad (1.3.2)$$

$$c'=\frac{[x'^2]([x'y'][x'^3]-[x'^2y'][x'^2])}{n([x'^2][x'^4]-[x'^3][x'^3])-[x'^2][x'^2][x'^2]}.$$

Коефіцієнт b\` і c\` можна виразити також і через коефіцієнт a\`

$$b'=\frac{[x'y']-a'[x'^2]}{[x'^2]},\quad c'=\frac{a'[x'^2]}{n}. \qquad (1.3.3)$$

Ймовірніша крива має вигляд

$$\varphi(x') = a'x'^2 + b'x' + c' . \qquad (1.3.4)$$

Або в початкових координатах

$$\varphi(x) - \frac{[y]}{n} = a'\left(x - \frac{[x]}{n}\right)^2 + b'\left(x - \frac{[x]}{n}\right) + c' \quad . \qquad (1.3.5)$$

Співставленням (1.3.4) з (1.2.1) находимо

$$\begin{aligned} a &= a', \\ b &= b' - 2a'\frac{[x]}{n}, \\ c &= c' + a'\left(\frac{[x]}{n}\right)^2 - b'\left(\frac{[x]}{n}\right) + \frac{[y]}{n}. \end{aligned} \qquad (1.3.6)$$

Крива (1.3.4) проходить через точки

$$\left(0; -a'\frac{[x'^2]}{n}\right),$$

$$\left(-\frac{[x]}{n}; a'\left(\frac{[x]}{n}\right)^2 - b'\frac{[x]}{n} + c'\right), \qquad (1.3.7)$$

$$\left(\frac{[x]}{n}; a'\left(\frac{[x]}{n}\right)^2 + b'\frac{[x]}{n} + c'\right).$$

Обчислення контролюються формулою

$$\begin{aligned} &[y^2] - \left([x'^2 y'] + [x'^2]\frac{[y]}{n} + [x'y']\frac{[x]}{n} + \left(\frac{[x]}{n}\right)^2 [y]\right)a - \\ &-\left([x'y'] + \frac{[x][y]}{n} b - c[y]\right)b - c[y] = [\varepsilon\varepsilon] \end{aligned} \quad . (1.3.8)$$

Якщо одна із величин [x`], [y`] або обидві точно не рівні нулю, а є невеликою величиною нехтувати якою не можна, то a`, b`, c` обраховуються за формулами (1.2.13). При цьому переваги перетворень повністю не використовуються, але все ж досягаються полегшення у обчислювальних роботах.1.4.

1.4. Знаходження поправок до наближених значень коефіцієнтів

Один із прийомів раціоналізації обробки матеріалів заключається в тому, що знаходяться не повні значення коефіцієнтів, а поправки до наближених їх значень a_l, b_l, c_l, отриманих на основі даних експериментальних визначень.

В даному випадку будемо мати систему початкових рівнянь

$$y_i - y_{li} = (a - a_l)y_i^2 + (b - b_l)y_i + (c - c_l)\,, \qquad (1.4.1)$$

де

$$y_{li} = a_l x_i^2 + b_l x_i + c_l\,, \qquad (1.4.2)$$

або

$$\begin{aligned} \delta a x_1^2 + \delta b x_1 + \delta c - \delta y_1 &= \varepsilon_1, \\ \delta a x_2^2 + \delta b x_2 + bc - \delta y_2 &= \varepsilon_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \delta a x_n^2 + \delta b x_n + \delta c - \delta y_n &= \varepsilon_n. \end{aligned} \qquad (1.4.3)$$

При цьому система нормальних рівнянь

$$
\begin{aligned}
&\delta a[x^4]+\delta b[x^3]+\delta c[x^2]-[\delta yx^2]=0,\\
&\delta a[x^3]+\delta b[x^2]+\delta c[x]-[\delta yx]=0, \qquad (1.4.4)\\
&\delta a[x^2]+\delta b[x]+[c]n-[\delta y]=0.
\end{aligned}
$$

Звідси значення поправок δa, δb, δc будуть

$$\delta a=\frac{[x^2\delta y](n[x^2]-[x][x])+[x\delta y]([x]x^2)-n[x^3]+[\delta y]([y][y^3]-[x^2][x^2])}{n([x^2][x^4]-[x^3][x^3])+[x]([x^2][x^3]-[x][x^4])+[x^2]([x][x^3]-[x^2][x^2])},$$

$$\delta b=\frac{[x^2\delta y]([x][x^2]-n[x^3])+[x\delta y](n[x^4]-[x^2][x^2])+[\delta y]([x^2][x^3]-[x][x^4])}{n([x^2][x^4]-[x^3][x^3])+[x]([x^2][x^3]-[x][x^4])+[x^2]([x][x^3]-[x^2][x^2])}, \quad (1.4.5)$$

$$\delta c=\frac{[x^2y]([x][x^3]-[x^2][x^2])+[x\delta y]([x^2][x^2])-[x][x^4]+[\delta y]([x^2][x^4]-[x^3][x^3])}{n([x^2][x^4]-[x^3][x^3])+[x]([x^2][x^3]-[x][x^4])+[x^2]([x][x^3]-[x^2][x^2])}.$$

Поправки δb і δc можна підрахувати і по більш простим формулам

$$\delta b=\frac{n[\delta y\cdot x]-[x][\delta x]}{n[y^2]-[x][x]}+\delta a\frac{[x][x^2]-n[x^3]}{n[x^2]-[x][x]}, \qquad (1.4.6)$$

$$\delta c=\frac{[\delta y][x^2]-[y][\delta y\cdot x]}{n[x^2]-[x][x]}+\delta a\frac{[x][x^3]-[x^2][x^2]}{n[x^2]-[x][x]}. \quad (1.4.7)$$

Додаючи поправки δa, δb, δc до наближених

коефіцієнтів a_l, b_l, c_l, отримаємо кінцеві значення шуканих коефіцієнтів

$$
\begin{aligned}
a&=a_l+\delta a,\\
b&=b_l+\delta b, \qquad (1.4.8)\\
c&=c_l+\delta c.
\end{aligned}
$$

Контрольна формула буде

$$[\delta y^2]-\delta a[x^2\delta y]-\delta b[x\delta y]-\delta c[\delta y]=[\varepsilon\varepsilon]. \quad (1.4.9)$$

1.5. Обробка матеріалів при рівновідстоячих значеннях аргументів

Позначивши інтервал аргумента через x і число визначень n за допомогою формул

$$X=x_i-x_1,$$

$$[X]=\chi\frac{n[n-1]}{2},$$

$$
\begin{aligned}
&[X^2] = \chi 2\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}, \\
&[X^3] = \chi^3\frac{n^2(n-1)^2}{4}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&[X^i] = \chi i\sum_0^n[k-1]^i, \\
&[Xy] = \chi[(k-1)y_k], \\
&[Xy]^2 = \chi[(k-1)y_k{}^2], \\
&[Xy^i] = \chi[(k-1)y_k{}^i], \\
&[X^2y] = \chi^2[(k-1)^2y_k], \\
&[X^3y] = \chi^3[(k-1)^3y_k], \\
&[X^iy^i] = \chi^i[(k-1)^iy^i{}_k].
\end{aligned}
\qquad (1.5.1)
$$

формули (1.3.2) приводять до виду

$$
\begin{aligned}
a' &= \frac{180\left\{(n-1)[(k-1)^2y_k]-[(k-1)y_k]-\frac{(n-1)(n-2)}{6}[y]\right\}}{\chi^2n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)}, \\
b' &= \frac{180\left\{(n-1)[(k-1)^2y_k]-\frac{(2n)-1(n+2)}{15}[(k-1)y_k]+\frac{(n-1)(2n-1)(n-2)}{10}[y]\right\}}{\chi n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)}, \quad (1.5.2) \\
c' &= \frac{3\{6(2n-1)[(k-1)y_k]-10[(k-1)^2y_k]-(3n^2-3n+2)[y]\}}{n(n+1)(n+2)}.
\end{aligned}
$$

Підставляючи у вихідне рівняння (1.2.7) отримані значення коефіцієнтів, визначених при умові, що $x_i` = x_i - x_1$, знайдемо

$$
\begin{aligned}
&\varphi(x) = a'x'^2 + b'x' + c' = a'(x-x1) + b'(x-x1) + c' = \\
&= a'x^2 + (b'-2a'x)x + (a'x2 - b'x + c')
\end{aligned}
. \qquad (1.5.3)
$$

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Звідки

$$
\begin{aligned}
&a = a', \\
&b = b' - 2a'x_1, \\
&c = a'x^2 - b'x_1 + c'.
\end{aligned}
\qquad (1.5.4)
$$

Контрольна формула буде

$$
\begin{aligned}
&[y^2] - a(x^2[y] + 2x_1\chi[(k-1)y_k] + \chi^2[(k-1)^2y_k]) - \\
&-b(x_1[y] + \chi[(k-1)y_k] - c[y]) = [\varepsilon\varepsilon].
\end{aligned}
\qquad (1.5.5)
$$

Можна добитися і подальших спрощень, виразивши визначені значення функції через кінцеві різниці першого порядку.

Якщо прийняти $y_1 = 0$, то формули спрощуються

$$
\begin{aligned}
&[y] = [(k-1)\Delta y_k], \\
&[xy] = \chi\left\{\frac{n(n-1)}{2}[\Delta y] - \frac{[k(k-1)(2k-1)\Delta y_k]}{6}\right\}.
\end{aligned}
\qquad (1.5.6)
$$

Аналогічно

$$
[x^2y] = \chi^2\left\{\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}[\Delta y] - \frac{[k(k-1)(2k-1)\Delta y_k]}{6}\right\}. \qquad (1.5.7)
$$

Підстановка значень цих різниць, а також сум $[x]$, $[x^2]$, $[x^3]$ при рівновідстоячих значеннях аргумента дає вираз шуканих коефіцієнтів через кінцеві різниці першого порядку

$$
-\frac{30[k(n-k)(n-2k)\Delta y_k]}{\chi^2 n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)},
$$

$$
b' = \frac{6(n-1)(n+2)[(n-k)\Delta y_k] - 5(n-1)[k(n-k)(n-2k)\Delta y_k]}{\chi n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)},
$$

$$
c' = \frac{(n+1)(n+2)[(n-k)\Delta y_k] - 3(n+2)[k(n-k)(n-2k)\Delta y_k]}{n(n+1)(n+2)} - \qquad (1.5.8)
$$

$$
-\frac{5[k(n-k)(n-2k)\Delta y_k]}{n(n+1)(n+2)}.
$$

Після обчислення a\`, b\`, c\` будемо мати рівняння

$$
\varphi(x') = a'x^2 + b'x + c', \qquad (1.5.9)
$$

або, повертаючись до початкового рівняння,

$$
\varphi(x) = a'(x-x_1)^2 + b'(x-x_1) + c' + y_1. \qquad (1.5.10)
$$

Звідси

$$
\begin{aligned}
a &= a', \\
b &= b' - 2a'x_1, \qquad (1.5.11) \\
c &= c' + a'x^2 - b'x_1 + y_1.
\end{aligned}
$$

Правильність обчислень контролюється за допомогою формули

$$
[y^2] - [y]\left\{ax_1^2 + bx_1 + c + a\chi(n-1)\left(x_1 + \chi\frac{2n-1}{6} + 6\chi\frac{n-1}{2}\right)\right\} -
$$

$$
-\chi[k(n-k)\Delta y](ax_1 + \frac{b}{2}) - a\chi\left(\frac{n-1}{2}[k(n-k)\Delta y_k] - \frac{[kn-k)(n-2k)\Delta y_k]}{}\right) = [\varepsilon\varepsilon]. \; (1.5.12)
$$

1.6. Побудова математичної моделі квадратичною залежністю, коли C = 0

При цьому

$$
y = ax^2 + bx \quad . \qquad (1.6.1)
$$

Початкові рівняння для цього випадку будуть

$$
\begin{aligned}
&ax_1^2 + bx_1 - y_1 = \varepsilon_1, \\
&ax_2^2 + bx_2 - y_2 = \varepsilon_2, \qquad (1.6.2) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&ax_n^2 + bx_n - y_n = \varepsilon_n.
\end{aligned}
$$

Невідомі коефіцієнти a і b визначаються із рішення двох нормальних рівнянь

$$
\begin{aligned}
&a[x^4] + b[x^3] - [x^2y] = 0, \qquad (1.6.3) \\
&a[x^3] + b[x^2] - [xy] = 0.
\end{aligned}
$$

із яких

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{[yx^2][x^2] - [xy][x^3]}{[x^4][x^2] - [x^3][x^3]}, \qquad (1.6.4) \\
b &= \frac{[yx][x^4] - [x^2y][x^3]}{[x^4][x^2] - [x^3][x^3]}.
\end{aligned}
$$

Коефіцієнт b можна підрахувати і за формулою

$$
b = \frac{[xy]}{[x^2]} - a\frac{[x^3]}{[x^2]}. \qquad (1.6.5)
$$

Контрольна формула має вигляд

$$
[y^2] - a[x^2y] - b[xy] = [\varepsilon\varepsilon] \quad . \qquad (1.6.6)
$$

Шукане рівняння запишеться у вигляді

$$\varphi(x) = ax^2 - a\frac{[x^3]}{[x^2]}x + \frac{[xy]}{[x^2]}x\,. \qquad (1.6.7)$$

Зрівноважена крива проходить через точки з координатами

$$(0;\,0),\quad \left(\frac{[x^3]}{[x^2]};\frac{[xy][x^3]}{[x^2][x^2]}\right),\quad \left(\frac{[x^4]}{[x^3]};\frac{[x^2y][x^4]}{[x^3][x^3]}\right). \qquad (1.6.8)$$

На практиці найшов застосування прийом, який заключається в тому, що праву і ліву частини рівняння (1.6.1) ділять на x, в результаті чого отримують рівняння першого степеня відносно x

$$q = ax + b\,, \qquad (1.6.9)$$

де

$$q = \frac{y}{x}\,.$$

Рішення цього рівняння ведеться за формулами прямолінійної залежності.

Початкові рівняння мають вигляд

$$\begin{aligned} &ax_1 + b - q_1 = \eta_1,\\ &ax_2 + b - q_2 = \eta_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &ax_n + b - q_n = \eta_n. \end{aligned} \qquad (1.6.10)$$

При цьому

$$q_1 = \frac{y_1}{x_1}, q_2 = \frac{y_2}{x_2}, \ldots, q_n = \frac{y_n}{x_n}\quad. \qquad (1.6.11)$$

Система нормальних рівнянь буде

$$\begin{aligned} &a[x^2] + b[x] - [qx] = 0,\\ &a[x] + bn - [q] = 0. \end{aligned} \qquad (1.6.12)$$

Звідки

$$a = \frac{n[qx] - [x][q]}{n[x^2] - [x][x]}, b = \frac{[x^2][q] - [qx][x]}{n[x^2] - [x][x]}\quad. \qquad (1.6.13)$$

Коефіцієнт b можна обчислити і за допомогою формули

$$b = \frac{[q]}{n} - a\frac{[s]}{n}\,. \qquad (1.6.14)$$

Зрівноважене значення функції запишеться

$$q(x) = ax^2 + bx\,. \qquad (1.6.15)$$

Попередній контроль виконується за формулою

$$[q^2] - a[qx] - b[q] = [\eta\eta]\,. \qquad (1.6.16)$$

Кінцева контрольна формула має вигляд

$$a(a[x^4] + b[x^3] - 2[qx^3]) + b(a[x^3] - 2[qx^2]) + [q^2x^2] = [\eta\eta xx]. \qquad (1.6.17)$$

При рівновідстоячих значеннях аргумента величини, які входять у формули для визначення коефіцієнтів і в контрольні формули, підраховуються за формулами як і в попередньому випадку.

Підстановка (1.6.14) в (1.6.15)

$$\varphi(x) = a\left(x^2 - \frac{[x]}{n}x\right) + \frac{[q]}{n}x \quad . \qquad (1.6.16)$$

дає можливість визначити координати точки, розташованої на експериментальній кривій, які просто виражаються через результати визначень, а саме

$$x = \frac{[x]}{n}; y = \frac{[q][x]}{n^2} \quad . \qquad (1.6.17)$$

Зроблені раніше зауваження відносно небажаності такого перетворення залишаються в силі для цього і для всіх аналогічних випадків.

1.7. Побудова математичної моделі квадратичною залежністю, коли b=0, c=0

При цьому

$$y = ax^2 . \qquad (1.7.1)$$

В даному випадку складається одне нормальне рівняння

$$a[x^4] = [x^2 y] \quad . \qquad (1.7.2)$$

Із якого слідує

$$a = \frac{[x^2 y]}{[x^4]}x^2 . \qquad (1.7.3)$$

Ймовірніше значення функції буде

$$\varphi(x) = \frac{[x^2 y]}{[x^4]}x^2 . \qquad (1.7.4)$$

Експериментальна крива проходить через точки

$$(0; 0) \quad , \quad \left(1; \frac{[x^2 y]}{[x^4]}\right), \quad \left(\frac{[x^4]}{[x^2 y]}; 1\right) \quad . \qquad (1.7.5)$$

Контрольною являється формула

$$[y^2] - a[x^2 y] = [\varepsilon\varepsilon] \quad . \qquad (1.7.6)$$

Якщо праву і ліву частини рівняння поділити на х, то отримаємо прямолінійну залежність

$$q = ax . \qquad (1.7.7)$$

Коефіцієнт а знаходиться за формулою

$$a = \frac{[qx]}{[x^2]} . \qquad (1.7.8)$$

Попередній контроль виконують за формулою

$$[q^2] - a[qx] = [\eta\eta] . \qquad (1.7.9)$$

Кінцева контрольна формула має вигляд

$$a(a[x^4] - 2[qx^2]) + [q^2 x^2] = [\eta\eta xx] . \qquad (1.7.10)$$

1.8. Оцінка точності результатів при побудові математичної моделі квадратичним поліномом

Перейдемо до формули середньої квадратичної похибки коефіцієнтів a, b, c при параболічній залежності другого степеня.

По аналогії із прямолінійною залежністю, після взяття частинних похідних виразів (1.2.7) по y_i, підведення до квадрату і додавання, отримаємо

$$\left[\left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)^2\right] = \frac{n[x^2]-[x][x]}{S}, \qquad (1.8.1)$$

$$\left[\left(\frac{\partial b}{\partial y}\right)^2\right] = \frac{n[x^4]-[x^2][x^2]}{S}, \qquad (1.8.2)$$

$$\left[\left(\frac{\partial c}{\partial Q}\right)^2\right] = \frac{[x^2][x^4]-[x^3][x^3]}{S}, \qquad (1.8.3)$$

де

$$S = n[x^2][x^4]-[x^3][x^3]+[x]([x^2][x^3]-[x][x^4]) + \qquad (1.8.4)$$
$$+[x^2]([x][x^3]-[x^2][x^2]).$$

Після підстановки отриманих значень сум частинних похідних у виразах середніх квадратичних похибок будемо мати

$$\begin{aligned} m_a &= \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-3}\cdot\frac{n[x^2]-[x][x]}{S}}, \\ m_b &= \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-3}\cdot\frac{n[x^4]-[x^2][x^2]}{S}}, \qquad (1.8.5) \\ m_c &= \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-3}\cdot\frac{[x^2][x^4]-[x^3][x^3]}{S}}. \end{aligned}$$

Ці ж формули застосовуються і для випадку, [illegible] коефіцієнти вичислені за допомогою (1.4.5) шляхом зрівноваження поправок до наближених значень невідомих.

Представляючи середню квадратичну похибку одиниці ваги

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-3}}, \qquad (1.8.6)$$

а обернені ваги зрівноважених коефіцієнтів

$$\sqrt{\frac{1}{p_a}} = \sqrt{\frac{n[x^2]-[x][x]}{S}}, \qquad (1.8.7)$$

$$\sqrt{\frac{1}{p_b}} = \sqrt{\frac{n[x^4]-[x^2][x^2]}{S}}, \qquad (1.8.8)$$

$$\sqrt{\frac{1}{p_c}} = \sqrt{\frac{[x^2][x^4]-[x^3][x^3]}{S}}. \qquad (1.8.9)$$

де ваги коефіцієнтів будуть

$$P_a = \frac{S}{n[x^2]-[x][x]}, \qquad (1.8.10)$$

$$P_b = \frac{S}{n[x^4]-[x^2][x^2]}, \qquad (1.8.11)$$

$$P_c = \frac{S}{[x^2][x^4]-[x^3][x^3]}. \qquad (1.8.12)$$

Середні квадратичні похибки коефіцієнтів, обчислені з врахуванням (1.5.8) визначаються формулами

$$m_a = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-3}\cdot\frac{n[x'^2]}{n([x'^2][x'^4]-[x'^3][x'^3])-[x'^2][x'^2][x'^2]}}\ ,\qquad (1.8.13)$$

$$m_b = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-3}\cdot\frac{n[x'^4]-[x'^2][x'^2]+4\frac{[x]}{n}(n[x'^2]-[x][x'^2])}{n([x'^2][x'^4]-[x'^3][x'^3])-[x'^2][x'^2][x'^2]}}\ ,\qquad (1.8.14),$$

$$m_c = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-3}\cdot\frac{Q}{n([x'^2][x'^4]-[x'^3][x'^3])-[x'^2][x'^2][x'^2]}}\ ,\qquad (1.8.15)$$

де

$$Q = [x'^2][x'^4]-[x'^3][x'^3]+\left(\frac{[x]}{n}\right)^2\left(n[x'^4]-[x'^2][x'^2]\right)+$$
$$+2\left(\frac{[x]}{n}\right)^2([x][x'^3]-[x'^2][x'^2])+[x'^2]\frac{[x]}{n}\left(\frac{[x]^3}{n^2}-2[x]\right).\qquad (1.8.16)$$

При рівновідстоячих значеннях аргумента формули середніх квадратичних похибок набувають виду

$$m_a = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-3}\cdot\frac{180}{\chi^4 n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)}}\ ,\qquad (1.8.17)$$

$$m_b = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-3}\cdot\frac{12\{60x_1^{\,2}+60x_1\chi(n-1)+\chi^2(2n-1)(8n-11)}{\chi^4 n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)}}\ ,\qquad (1.8.18)$$

$$m_c = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-3}\cdot\frac{T}{\chi^4 n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)}}\ ,\qquad (1.8.19).$$

де

$$T = 3\{60x_1^{\,4}+120x_1\chi(n-1)+12x_1^{\,2}\chi^2(7n^2-15n+7)+$$
$$+12x_1\chi^3(n-1)(n-2)(2n-1)+\qquad (1.8.20)$$
$$+\chi^4(n-1)(n-2)(3n^2-3n+2)+12x_1\chi 3(n-1).$$

Ці ж формули застосовують для підрахунку середніх квадратичних похибок коефіцієнтів, виражених через кінцеві різниці (1.5.8).

При

$$y = ax^2+bx\ .\qquad (1.8.21)$$

формули середніх квадратичних похибок

$$m_a = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-2}\cdot\frac{[x^2]}{[x^4][x^2]-[x^3][x^3]}},$$
$$m_b = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-2}\cdot\frac{[x^4]}{[x^4][x^2]-[x^3][x^3]}}.\qquad (1.8.22)$$

В тому випадку, коли обчислення коефіцієнтів ведеться за формулами (1.6.13), середні квадратичні похибки визначаються за формулами

$$m_a = \sqrt{\frac{[\eta\eta]}{n-2}\cdot\frac{n}{n[x^2]-[x][x]}}\ ,\qquad (1.8.23)$$

$$m_b = \sqrt{\frac{[\eta\eta]}{n-2}\cdot\frac{[x^2]}{n[x^2]-[x][x]}}\ .\qquad (1.8.24)$$

Величина η підраховуються за формулами (1.6.10).

Для квадратичної залежності

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$y = ax^2 \tag{1.8.25}$$

середня квадратична похибка коефіцієнта дається формулою

$$m_a = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-1} \cdot \frac{1}{[x^4]}} \quad . \tag{1.8.26}$$

Якщо значення коефіцієнта а підраховувалось із формули (1.7.8)

$$a = \frac{[qx]}{[x^2]},$$

то середня квадратична похибка вказаного коефіцієнта

$$m_a = \sqrt{\frac{[\eta\eta]}{n-1} \cdot \frac{1}{[x^2]}} \cdot \quad . \tag{1.8.9}$$

1.9. Середня квадратична похибка зрівноваженої функції квадратичного поліному

Середня квадратична похибка зрівноваженої функції підраховується за формулою

$$m_\varphi = \sqrt{m_4^2 \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right]} \quad , \tag{1.9.1}$$

де

$$m_y^2 = \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-3} \quad , \tag{1.9.2}$$

ABBYY PDF Transformer 3.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \right)^2 = \left(\frac{\partial}{\partial y_i} x^2 + \frac{\partial b}{\partial y_i} x + \frac{\partial c}{\partial y_i} \right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial a}{\partial y_i} \right)^2 x^4 + \left(\frac{\partial b}{\partial y_i} \right)^2 x^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial y_i} \right)^2 + 2\left(\frac{\partial a}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial b}{\partial y_i} \right) x^3 + \tag{1.9.3}$$

$$+ 2\left(\frac{\partial b}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial c}{\partial y_i} \right) x^2 + 2\left(\frac{\partial b}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial c}{\partial y_i} \right) x.$$

Після знаходження сум цієї рівності отримаємо

$$\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] = \left[\left(\frac{\partial a}{\partial y} \right)^2 \right] x4 + \left[\left(\frac{\partial b}{\partial y} \right)^2 \right] x2 + \left[\left(\frac{\partial c}{\partial y} \right)^2 \right] + \qquad \ldots\ldots. \tag{1.9.4}$$

$$+ 2\left[\frac{\partial a}{\partial y} \cdot \frac{\partial b}{\partial y} \right] x^3 + 2\left[\frac{\partial a}{\partial y} \cdot \frac{\partial c}{\partial y} \right] x^2 + 2\left[\frac{\partial b}{\partial y} \cdot \frac{\partial c}{\partial y} \right] x.$$

Підставляючи (1.9.2), (1.9.3), (1.9.4) в (1.9.1), будемо мати

$$m\varphi = \sqrt{m_a^2 x^4 + m_b^2 x^2 + m_c^2 + 2\frac{[EE]}{n-3} \left\{ \left[\frac{\partial a}{\partial y} \cdot \frac{\partial b}{\partial y} \right] x^3 + \left[\frac{\partial a}{\partial y} \cdot \frac{\partial c}{\partial y} \right] x^2 + \left[\frac{\partial b}{\partial y} \cdot \frac{\partial c}{\partial y} \right] x \right\}} \tag{1.9.5}$$

Розкриваючи вирази, які стоять у фігурних дужках, після виконання всіх дій, отримаємо

$$\left[\frac{\partial a}{\partial y} \cdot \frac{\partial b}{\partial y} \right] x^3 = \frac{1}{S} \left([x][x^2] - n[x^3] \right) x^3,$$

$$\left[\frac{\partial a}{\partial y} \cdot \frac{\partial c}{\partial y} \right] x^2 = \frac{1}{S} \left([x][x^3] - [x^2][x^2] \right) x^2, \tag{1.9.6}$$

$$\left[\frac{\partial b}{\partial y} \cdot \frac{\partial c}{\partial y} \right] x = \frac{1}{S} \left([x^3][x^2] - [x][x^4] \right) x.$$

Таким чином, кінцевий результат розрахунку середньої квадратичної похибки зрівноваженої функції при поліномі другої степені буде мати вигляд

$$m_\varphi = \sqrt{m_a^2 x^4 + m_b^2 x^2 + m_c^2 + 2\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-3}\frac{E}{S}}, \qquad (1.9.7)$$

де

$$\begin{aligned} E = ([x][x^2] - n[x^3])x^3 + ([x][x^3] - \\ -[x^2][x^2])x^2 + ([x^2][x^3] - [x][x^4])x, \end{aligned} \qquad (1.9.8)$$

$$\begin{aligned} \Delta = S = n([x^2][x^4] - [x^3][x^3]) + [x]([x^2][x^3] - \\ -[x][x^4]) + [x^2]([x][x^3] - [x^2][x^2]). \end{aligned} \qquad (1.9.9)$$

Для випадку перетворень за допомогою переносу початку координат в точку $x' = x - \frac{[x]}{n}$ формула (1.9.7) перетвориться у

$$m_\varphi = \sqrt{m_a^2 x^4 + m_b^2 x^2 + m_c^2 + 2\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-3}\frac{E'}{S'}}, \qquad (1.9.10)$$

де

$$\begin{aligned} E' = (-n[x'^3] - 2[x][x'^2])x^3 + ([x][x'^2] + \\ +[x'^2]\frac{[x]^3}{n^2} - [x'^2])x^2 + ([x'^2][x'^3] - [x][x'^4])x, \end{aligned} \qquad (1.9.11)$$

$$S' = n([x'^2][x'^4] - [x'^3][x'^3]) + [x'^2][x'^2][x'^2]. \qquad (1.9.12)$$

При рівновідстоячих значеннях аргумента величини E і S будуть мати вигляд

$$\begin{aligned} E = -360\{2x_1 + \chi(n-1)\}x^3 + 60\{6x_1{}^2\chi(n-1) + \\ +\chi^2(n-1)(n-2)\}x^2 - 36\{20x_1{}^3 + 30x_1{}^2\chi(n-1) + \\ +2x_1\chi^2(7n^2 - 15n + 7) + \chi^3(n-1)(n-2)(2n-1)\}x. \end{aligned} \qquad (1.9.13)$$

$$S = \chi^4 n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2). \qquad (1.9.14)$$

Ці формули також застосовуються при вираженні шуканих коефіцієнтів a, b, c через кінцеві різниці.

Для того, щоб проаналізувати формулу середньої квадратичної похибки (1.9.7), придамо їй дещо інший вигляд.

Для цього виразимо c із (1.2.7) через коефіцієнти a і b

$$c = \frac{[y]}{n} - b\frac{[x]}{n} - a\frac{[x^2]}{n} \qquad (1.9.15)$$

і підставимо його у (1.2.8)

$$\varphi(x) = a\left(x^2 - \frac{[x^2]}{n}\right) + b\left(x - \frac{[x]}{n}\right) + \frac{[y]}{n}. \qquad (1.9.16)$$

У цій формулі залежними величинами від результатів експерименту, являються a, b і $\frac{[y]}{n}$. Знаходячи середню квадратичну похибку цього виразу по наведеним вище правилам і маючи на увазі, що

$$\frac{\partial \frac{[y]}{n}}{\partial y_i} = \frac{1}{n}; \qquad \left[\left(\frac{\partial \frac{[y]}{n}}{\partial y}\right)^2\right] = \frac{1}{n}, \qquad (1.9.17)$$

отримаємо після всіх дій і перетворень

$$m_{\varphi} = \sqrt{m_a^2\left(x^2 - \frac{[x^2]}{n}\right)^2 + m_b^2\left(x - \frac{[x]}{n}\right)^2 + m^2_{\frac{[y]}{n}} +}$$
$$\overline{+2\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-3}\frac{([x][x^2]-n[x^3])(x^2-\frac{[x^2]}{n})(x-\frac{[x]}{n})}{S}} \qquad (1.9.18)$$

де

$$S = n([x^2][x^4]-[x^3][x^3]) + [x]([x^2][x^3]-[x][x^4]) + \\ +[x^2]([x][x^3]-[x^2][x^2]), \qquad (19.19)$$

$$m^2_{\frac{[y]}{n}} = \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n(n-3)}. \qquad (1.9.20)$$

Розглядаючи цей вираз, бачимо, що при значеннях x рівному $\sqrt{\frac{[x^2]}{n}}$, похибка коефіцієнта a не впливає на величину середньої квадратичної похибки функції.

В даному випадку

$$m_{\varphi} = \sqrt{m_b^2\left(x - \frac{[x]}{n}\right)^2 + m^2_{\frac{[Q]}{n}}} \quad . \qquad (1.9.21)$$

При значеннях x рівному $\frac{[x]}{n}$, на величину середньої квадратичної похибки функції не впливає похибка коефіцієнта

$$m_{\varphi} = \sqrt{m_a^2 + \left(x2 - \frac{[x2]}{n}\right) + m^2_{\frac{[y]}{n}}} \; . \qquad (1.9.22)$$

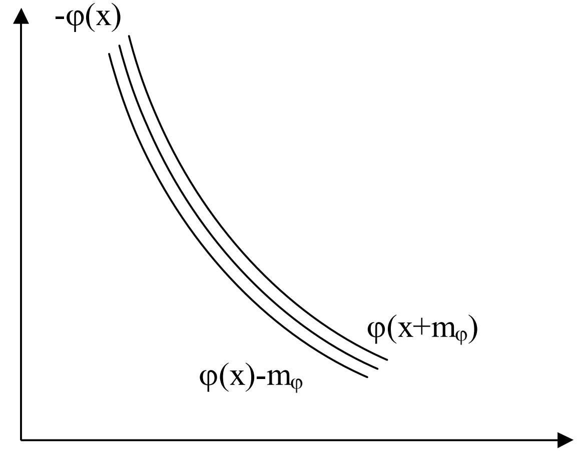


Рис.1. Зона розсіювання функції $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$

Таким чином, при одному із зазначених в середній частині інтервалу спостережень, середня квадратична похибка функції отримує мінімальне значення, збільшуючись до кінців інтервалу і за межами його.

Зона розсіювання обмежується кривими, які проходять через точки з абсцисами $\sqrt{\frac{[x^2]}{n}}$ і $\frac{[x]}{n}$.

$$\varphi(x) = ax^2 + bx + c \pm m_{\varphi}, \qquad (1.9.23)$$

де m_{φ} виражається формулою (1.9.18) (рис.1)

У випадку квадратичної залежності (1.6.1)

$$\varphi(x) = ax^2 + bx$$

середня квадратична похибка виражається формулою

$$m_\varphi = \sqrt{m_a^2 x^4 + m_b^2 x^2 - 2\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-3}\cdot\frac{[x^3]}{[x^4][x^2]-[x^3][x^3]}x^3} \quad . \qquad (1.9.24))$$

При перетворенні рівняння до прямолінійної залежності шляхом ділення правої і лівої частини (1.6.1) на x

$$q = ax + b\,,$$

формули середньої квадратичної похибки зрівноваженої функції

$$m_q = \sqrt{m_a^2 x^2 + m_b^2 - 2\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-2}\cdot\frac{[x]}{n[x^2]-[x][x]}x}\,,\; m_\varphi = m_q x. \qquad (1.9.25)\,,$$

Для випадку

$$y = ax^2\,,$$

формула середньої квадратичної похибки зрівноваженої функції

$$m_\varphi = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-1}\cdot\frac{x^4}{[x^4]}} \quad . \qquad (1.9.26)$$

Якщо для рішення задачі застосовувалася формула

$$q = ax$$

то

$$m_q = \sqrt{\frac{[\eta\eta]}{n-1}\cdot\frac{x^2}{[x^2]}}\,, \qquad (1.9.27)$$

$$m_\varphi = m_q x\,. \qquad (1.9.28)$$

РОЗДІЛ 2. Побудова економіко-математичної моделі квадратичним поліномом

2.1. Побудова моделі

Для складання нормальних рівнянь використовуємо вбудовані в MS EXCEL статистичні функції **СУММ** і **СУММПРОИЗВ.**

Для скороченого запису ці вбудовані функції позначимо, відповідно через **С** і **СП.**

Симплекс – таблиця для розв'язування системи нормальних рівнянь в електронних таблицях записується у такому вигляді

Таблиця 2. Алгоритм складання нормальних рівнянь

A	B	C	D	E
17	a0	a1	a2	l
18	n	С(p)	С(p^2)	-С(d)
19	С(p)	СП(p, p)	СП(p,p^2)	-СП(p,d)
20	С(p^2)	СП(p^2,p)	СП(p^2,p^2)	-СП(p^2,d)

Таблиця 3. Обчислювальна таблиця

	A	B	C	D
1	Ціна Х у.о	К-сть тов.У		Зрів.функц
2	p	D	p^2	Dr
3	**1**	**8,3**	1	8,196853
4	**2**	**7,28**	4	7,437287
5	**3**	**6,38**	9	6,695786
6	**4**	**6,3**	16	5,97235
7	**5**	**5,49**	25	5,266979
8	**6**	**4,7**	36	4,579674
9	**7**	**3,7**	49	3,910434
10	**8**	**3,2**	64	3,259259
11	**9**	**2,5**	81	2,626149
12	**10**	**1,96**	100	2,011105
13	**11**	**1,56**	121	1,414126
14	6,412324	0,61	41,11790	4,301541

родовження таблиці 3.

	D	E	F	G	H	I
1	Зрівн.ф-ц	коеф.еласт	Товарообіг		Собів.прод	Прибуток
2	Dr	Kel	z=p*Dr	(D-Dr)^2	V	P*Dr-V
3	8,196853	-0,093768	8,196853	0,010639	26,39371	-18,1969
4	7,437287	-0,20183	14,87457	0,024739	24,87457	-10
5	6,695786	-0,328177	20,08736	0,099721	23,39157	-3,30421
6	5,97235	-0,478474	23,8894	0,107355	21,9447	1,944699
7	5,266979	-0,661041	26,3349	0,049738	20,53396	5,800937
8	4,579674	-0,88863	27,47804	0,014478	19,15935	8,318695
9	3,910434	-1,181826	27,37303	0,044282	17,82087	9,552168
10	3,259259	-1,576167	26,07407	0,003512	16,51852	9,555552
11	2,626149	-2,138756	23,63534	0,015914	15,2523	8,383044
12	2,011105	-3,013327	20,11105	0,002612	14,02221	6,088839
13	1,414126	-4,573433	15,55538	0,021279	12,82825	2,727133
14	4,301541	-1	27,58288	0,394269	8,979794	18,60308

На основі алгоритму, приведеному в табл.2. отримуємо матрицю коефіцієнтів нормальних рівнянь

a0	a1	a2	l
11	66	506	-51,37
66	506	4356	-233,610
506	4356	39974	-1475,45

При цьому у четвертому стовпчику представлений вектор вільних членів

Для розв'язання системи нормальних рівнянь використо-вуємо звичайні жорданові перетворення (ЗЖП) , вибираючи за розв'язувальні елементи діагональні елементи. Значення симплекс-таблиці після першого кроку ЗЖП знаходяться у блоці **(B23:E25)**. Опишемо процедуру обчислення одного кроку .

1. Елементи, що не належать розв'язувальному рядку та розв'язувальному стовпцю, обчислюють за формулою

$$b_{ij} = a_{ij} - a_{is} * a_{ri} / a_{rs} \quad . \qquad (2.1.1)$$

Так, для комірки **C24:**

=C19-$C$18*$B$19/$B$18. (2.1.2)

Формулу копіюємо в решту комірок симплекс-таблиці.

2. Елементи розв'язувального стовпця ділять на розв'язувальний елемент, так для комірки **B24:**

=B19/$B$18. (2.1.3)

Формулу копіюємо у комірку розв'язувального стовпця **B25.**

3. Елементи розв'язувального рядка змінюють знак на протилежний та ділять на розв'язувальний елемент. Так, для комірки **C23:**

= - C18/$B$18. (2.1.4)

Введену формулу копіюють в інші комірки розв'язувального рядка.

4. Замість розв'язувального елемента береться його обернене значення. **B23: = 1/B18.**

Таким же чином робляться інші кроки **ЗЖП.** У блоці **B33:D35** буде знаходитись зворотна матриця, а в блоці **E33:E35** вектор оцінок параметрів регресії. Оцінки параметрів для контролю знаходять, використовуючи вбудовану статистичну функцію **ЛИНЕЙН.**

Розрахункове значення кількості проданого товару d1по ціні p1 обчислюється у комірці **D3:**

=$E$33+$E$34*A3+$E$35*C3. (2.1.5)

Одержану формулу копіюють у блок **D4:D14.**

Коефіцієнт еластичності для p1 обчислюється у комірці **E3** За формулою

=($E$34+2*$E35*A3)*A3/D3.   (2.1.6)

Одержану формулу копіюють у комірки **E4:E14.**

Зауваження: Заміна відносних посилань на абсолютні може здійснюватись двома способами:

- безпосереднім введенням символу “$” перед відповідною координатою;
- у режимі редагування **(F2)** переводиться курсор на адресу посилання і натискається клавіша **(F4)** –(клавіша зміни абсолютного посилання).

Середній товарообіг для відповідної ціни у грошовому вираженні обчислюється в блоці **F3:F14.** Квадрат відхилень розрахункових значень від експериментальних обчислюється в блоці **G3:G13,** а сума квадратів відхилень обчислюється у комірці **G14** з використанням вбудованої функції **СУММ.**

Собівартість продукції залежно від обсягу випуску визначається в блоці **H3:H14.**

Прибуток підприємства у залежності від ціни реалізації визначається у блоці **I3:I14.**

У комірці **H17** обчислюється розрахункове значення критерію Фішера . Для обчислення незміщеної дисперсії використовують вбудовану статистичну функцію **СТАНДОТКЛОНП.** Функція **СТАНДОТКЛОНП** знаходить незміщене середньоквадратичне відхилення за вказаним полем бази даних.

Для оцінки параметрів еластичності регресії попиту у комірках **H18, H19** знаходяться критичні значення за формулою

$$P_{1k,2k} = (-a_1(+-)\sqrt{a_1 - 3a_1a_0}\,/(3a_2)\,. \qquad (2.1.7)$$

Область досліджуваних значень цін належить P_{2k}.

Коефіцієнт еластичності при зміні ціни від $\mathbf{P_1}$ до $\mathbf{P_{2k}}$ спадає від значення -0,09 до -1, а товарообіг у грошовому вираженні **P*D2** на цьому проміжку зростає. На проміжку $\mathbf{P_{2k}}$, $\mathbf{P_{11}}$ коефіцієнт еластичності змінюється у межах від -1 до – 4,59.

Товарообіг у грошовому вираженні на цьому проміжку спад
Значить у точці $\mathbf{P_{2k}}$ товарообіг у грошовому вираженні максимальний. Значення для $\mathbf{P_{2k}}$ знаходяться в останньому рядку таблиці. З таблиці видно, що при максимальному товарообігу коефіцієнт еластичності дорівнює – 1.

Для оцінки ціни на товар, при якій буде максимальний прибуток, знаходимо критичні точки $\mathbf{P_{3k}}$ і $\mathbf{P_{4k}}$. Області досліджуваних цін належать $\mathbf{P_{4k}}$. Для визначення характеру поведінки функції на проміжках **(**$\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_{4K}}$**)** та **(**$\mathbf{P_{4k}}$, $\mathbf{P_{11}}$ **)** знаходимо в точках $\mathbf{P_1}$ та $\mathbf{P_{11}}$ значення **dF/dP** відповідно у комірках **H26, H27.** Припустимо, що у комірці **H26:**

=3*E34*A3^2+2*(E34-H16*E35)*A3+E33-H16*E34. (2.1.8)

Оскільки похідна при переході через точку $\mathbf{P_{4K}}$ змінює знак з плюса на мінус, то при ціні $\mathbf{P_{4K}}$ прибуток буде максимальним. Значення максимального прибутку обчислюється у комірці **H24,** а оцінка кількості реалізованого товару при максимальному товарообігу в грошовому вираженні визначається у комірці **H25.** Для наглядності побудуємо два графічні зображення. На графіку «Попит, товарообіг та еластичність» **D(B3:B13)** – статистичні дані, $\mathbf{D_r}$**(D3:D13)** – регресія попиту, **Z(F3:F13)** – товарообіг у грошовому вираженні, **K(E3:E13)** – еластичність попиту. Отже, у першому діалозі ***Мастера диаграмм*** повинен бути такий запис

=$A$2:$A$13;$B$2:$B$13;$D$2:$D$13;

$F$2:$F$13;$E$2:$E$13.

На графіку «Залежність собівартості продукції товарообігу у грошовому виразі та прибутку від обсягу випущеної продукції» **V(H3:H13)** – собівартість продукції , **Z(F3:F13)** – товарообіг у грошовому вираженні , **ZV(I3:I13)** – прибуток від обсягу реалізованої продукції.

Таким чином, на основі вище сказаного, ми отримали

Таблиця 4. Рішення нормальних рівнянь

				b=YXтр	
Симплекс-таблиця		Коеф.норм.р-нь		Вільні чл.	
	a0	a1	a2	1	
0=	11	66	506	-51,37	
0=	66	506	4356	-233,610	
0=	506	4356	39974	-1475,45	
	Перший крок ЗЖП				
	0	a1	a2	1	
a0=	0,090909	-6	-46	4,67	
0=	6	110	1320	74,61	
0=	46	1320	16698	887,57	
Другий крок ЗЖП					
	0	0	a2	1	
a0=	0,418182	-0,054545455	26	8,739636	
a1=	-0,05455	0,009090909	-12	-0,678273	
0=	-26	12	858	-7,75	
Третій крок ЗЖП				Шукані коефіцієнти	
	Обернена матриця			b=YXтр	
a0=	1,206061	-0,418181818	0,030303	8,974485	c=a0
a1=	-0,41818	0,176923077	-0,01399	-0,78666	b=a1
a2=	0,030303	-0,013986014	0,001166	0,009033	a=a2
				Y=aX^2+bX+C	
				D=0,01p^2-0,79p+8,97	

Тобто, обернена (зворотна) матриця в нашому випадку

1,206061	-0,41818	0,030303
-0,41818	0,176923	-0,01399
0,030303	-0,01399	0,001166

При цьому, вектор шуканих коефіцієнтів

8,974485	**c=a0**
-0,78666	**b=a1**
0,009033	**a=a2**

Дослідження матриці на невиродженість

Спочатку ми стверджуємо **теорему 1 [13, с. 35] .**

Система рівнянь не має рішення в тому і тільки в тому випадку, коли визначник оберненої матриці нормальних рівнянь дорівнює абсолютному нулю. У всіх інших випадках система має рішення.

Існує думка, що коли визначник оберненої матриці близький до нуля, то рішення системи рівнянь не існує.

І дійсно, при розрахунку на калькуляторах, або при заданому числу значущих цифр, рівних 5 або 6 знаків на персональному комп´ютері , визначник буде дорівнювати нулю, а згідно головного правила математики «Не діли на нуль» , система рівнянь не буде мати розв´язку .

Навіть при рішенні нормальних рівнянь на персональному комп´ютері по розробленій автором програмі, комп´ютер видавав помилку і відмовлявся виконувати таку програму. В роботі Дьяконова В.П.”Справочник по алгоритмам и программам на языке Бейсик для персональных ЭВМ “,М:Наука,1989,-240с, приведена програма наближеного обчислення системи лінійних рівнянь з виродженою матрицею.

При цьому система рівнянь

……. $$CX = D, \qquad (2.1.9)$$

де - вироджена матриця, наближено рішається , якщо допустити, що C_{ij} і d_i задані з деяким t-наближенням. Тоді, цю систему можна звести до рішення системи

$$AX = B, \qquad (2.1.10)$$

так, що

$$\left|C_{ij} - a_{ij}\right| \le t, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.1.11)$$

$$\left|b_{ij} - d_{sj}\right| \le t, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.1.12)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0 \prec t \le 0.000000001.$$

Для рішення обчислюється параметр

$$\alpha = 0{,}5\sqrt{Nt}. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.1.13)$$

За незалежні приймаються компоненти вектора X_n , який отримують рішенням системи слідуючого виду

$$\left[\left(A^T A + \alpha E\right)\right] * \left[X_\alpha\right] = \left[A^T B\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.1.14)$$

методм квадратних коренів.

Слід відмітити, що при розрахунку за вбудованими операторами в MS Excel забезпечується точність до 17 знаків і ця проблема вирішується.

Так, в нашому випадку, нами отримано значення визначника

Обернена	1,206061	-0,418181818	0,030303
матрицяQ	-0,41818	0,176923077	-0,01399
	0,030303	-0,013986014	0,001166
	D(Q)=Δ=	9,63224E-07	

Δ =0,000000963224=9,63224E-07.

, що не зашкодило рішити систему рівнянь.

На основі табл.4 , де приведено рішення нормальних рівнянь, що доказує теорему1.

Констатуємо:

Таким чином, система рівнянь не має рішення в тому і тільки в тому випадку, коли визначник оберненої матриці нормальних рівнянь дорівнює абсолютному нулю. У всіх інших випадках система має рішення. **Теорема доказана.**

Таким чином, на основі проведених досліджень нами отримана математична модель залежності продаж товару від його ціни у вигляді формули

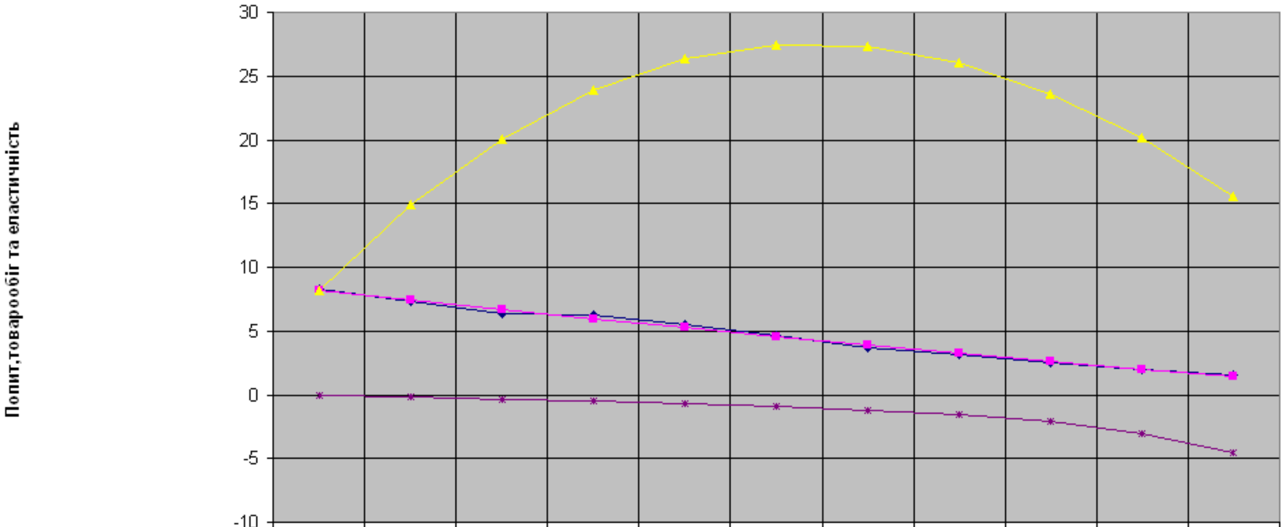
$$\mathbf{Dr = 0.009033p^2 - 0.78666p + 8.974485.} \quad (2.1.15)$$

Підставляючи значення **p** (другий стовпчик таблиці 2.2) у формулу (2.1.9), отримали значення зрівноваженої функції **Dr.**

В подальшому вирахували

G	H	I	J	K	L
C=	10				**15**
V1=	2				**16**
Fроз.=	514,1256		F(0,05;2;8)=	4,45897	**17**
P1=	51,64858	Критичні значення оцінки параметрів			**18**
P2=	6,412324	еластичності регресії попиту			**19**
D=	0,375651				**20**
Dv=	1,447064				**21**
P3=	51,8933				**22**
P4=	7,500936				**23**
F(p4)=	9,704235	max.прибуток			**24**
Dop=	3,581978	оцінка кількості реалізованого товару			**25**
при максимальному товарообігу в грошовому вираженні					

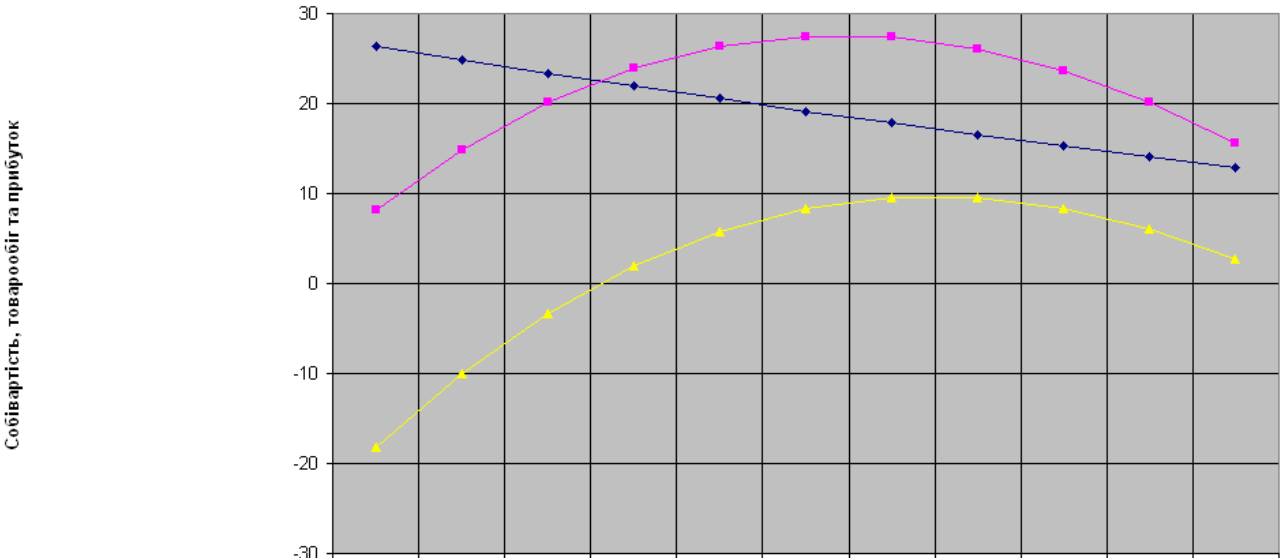
Попит,товарообіг та еластичність



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Статистичні дані	8,3	7,28	6,38	6,3	5,49	4,7	3,7	3,2	2,5	1,96	1,56
Регресія попиту	8,1968531	7,4372867	6,6957855	5,9723497	5,266979	4,5796737	3,9104336	3,2592587	2,6261492	2,0111049	1,4141259
Товарообіг у грош.вир.	8,1968531	14,874573	20,087357	23,889399	26,334895	27,478042	27,373035	26,07407	23,635343	20,111049	15,555385
Еластичність попиту	-0,0937676	-0,20183	-0,3281774	-0,4784738	-0,6610412	-0,8886302	-1,181826	-1,5761674	-2,138756	-3,0133269	-4,5734332

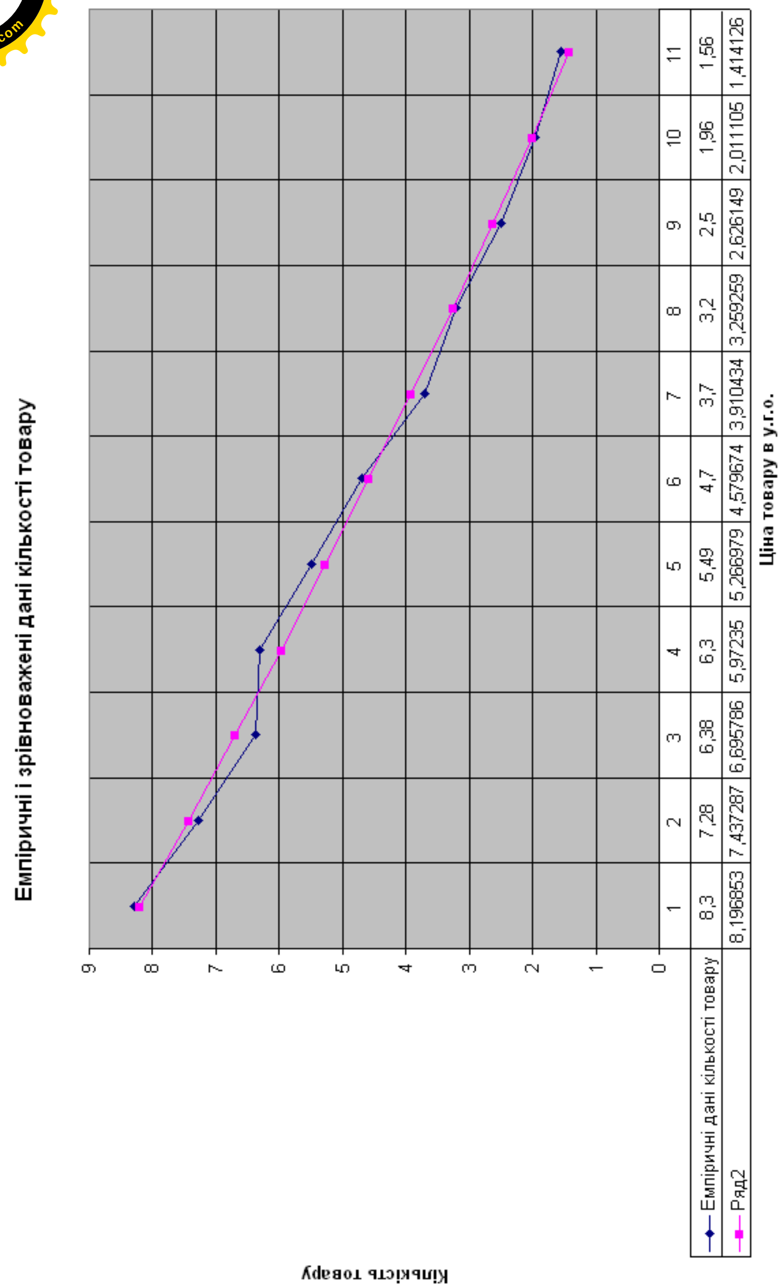
Ціна товару

Залежність собівартості продукції товарообігу та прибуток від обсягу випущеної продукції

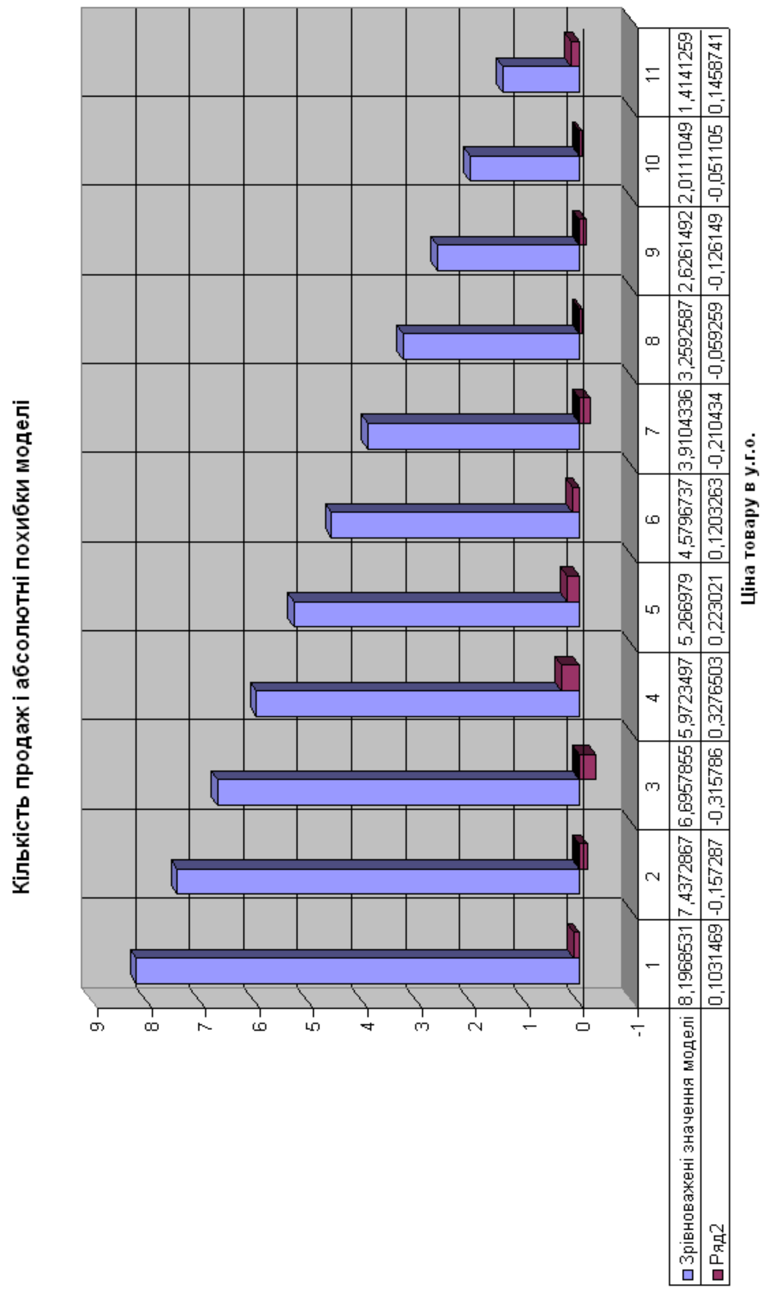


	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Собівартість продукції	26,393706	24,874573	23,391571	21,944699	20,533958	19,159347	17,820867	16,518517	15,252298	14,02221	12,828252
Товарообіг у грош.вираж.	8,1968531	14,874573	20,087357	23,889399	26,334895	27,478042	27,373035	26,07407	23,635343	20,111049	15,555385
Прибуток від обсягу реалізації	-18,19685	-10	-3,304214	1,9446993	5,8009371	8,3186946	9,5521678	9,5555524	8,3830443	6,0888392	2,7271329

Ціна товару



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Емпіричні дані кількості товару	8,3	7,28	6,38	6,3	5,49	4,7	3,7	3,2	2,5	1,96	1,56
Ряд2	8,196853	7,437287	6,695786	5,97235	5,266979	4,579674	3,910434	3,259259	2,626149	2,011105	1,414126



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Зрівноважені значення моделі	8,1968531	7,4372867	6,6957855	5,9723497	5,266979	4,5796737	3,9104336	3,2592587	2,6261492	2,0111049	1,4141259
Ряд2	0,1031469	-0,157287	-0,315786	0,3276503	0,223021	0,1203263	-0,210434	-0,059259	-0,126149	-0,051105	0,1458741

2.2. Контроль зрівноваження

Перший контроль

Контрольна формула має вигляд

$$[y^2] - a[yx^2] - b[yx] - c[y] = [\varepsilon\varepsilon] \quad . \qquad (1.2.9)$$

При цьому, комп'ютерна формула буде

= T14+E18*E33+E19*E34+E20*E35. (2.2.1)

В даному випадку

E18 = - [Y] ,
E19 = - [YX],
E20 = - [YX^2].

Приймаючи до уваги, що сума

T14 = [YY] = [D^2] = 290,9681,

a = 0,009033,
b = -0,78666,
c = 8,974485,
[YX^2] = 1475,45,
[YX] = 233,61,
[Y] = 51,37 ,

отримали

Контроль зрівноваження	
[YY]-a[YX^2]-b[YX]-c[Y]=0,394268904	
[YY]=290,9681	[εε]=0,394268904
L*b(тр)=461,0193	Δ=-1,43496E-13

Таким чином, була забезпечена повна коректність і строгість процедури строгого зрівноваження за методом найменших квадратів.

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Другий контроль

Другим контролем процедури зрівноваження був розрахунок за формулою

=ЛИНЕЙН(B3:B13;J3:K13;1;1) , **(2.2.2)**

де вектор **Y = D(B3:B13) :**

Кількість товару У
D
8,3
7,28
6,38
6,3
5,49
4,7
3,7
3,2
2,5
1,96
1,56

Матриця **X(J3:K13) :**

Ціна Х у.о.	
p	p^2
1	1
2	4

3	**9**
4	**16**
5	**25**
6	**36**
7	**49**
8	**64**
9	**81**
10	**100**
11	**121**

І в нашому випадку отримали

Апроксимація поліномом другого степеня				
a	b	c	F(0,05;2;8)=	4,45897
0,009033	-0,78666	8,974485	a,b,c,d	Коефіц.
0,007579	0,093378	0,243801	стандарт S	ai=S√dii
0,99228	0,221999	#Н/Д	R^2	μ
514,1256	8	#Н/Д	Fкритерій	n-m-1
50,67593	0,394269	#Н/Д	[(Y'-Ycp)^2]	[VV]
1,191809	-8,42454	36,81067	t(0,05;8)=	2,306004

В третій строчці приведені коефіцієнти математичної моделі:

0,009033	- 0,78666	8,974485	a,b,c,d	Коефіц.

Але раніше нами були встановлені такі коефіцієнти

8,974485	c=a0
-0,78666	b=a1
0,009033	a=a2

Порівняння результатів опрацювання експериментальних даних двома різними методами встановлює їх повну автентичність.

Встановлений коефіцієнт детермінації R^2=0.99228 гово... про високу адекватність побудованої математичної мод... експериментальним даним.

Аналіз моделі за критерієм Фішера-Снедекора

Аналіз моделі за критерієм Фішера-Снедекора	
Fкритерій	514,1256
F(0,05;2;8)=	4,45897
F>F(0,05;2;8)	
Модель адекватна експериментальним даним	

Аналіз моделі за критерієм Стьюдента

Аналіз моделі за критерієм Стьюдента				
1,191809	- 8,42454	36,81067	t(0,05;8)=	2,306004
t(a)	t(b)	t (c)		
Статистично незначимий лише один коефіцієнт "a"				

ОЗДІЛ 3. ОЦІНКА ТОЧНОСТІ ЕЛЕМЕНТІВ ЗРІВНО-АЖЕНОЇ ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ

3.1. Оцінка точності коефіцієнтів побудованої моделі

Середня квадратична похибка встановлення кількості продаж тих чи інших товарів μ дорівнює корню квадратному із суми квадратів відхилень [VV] поділених на число пар значень X і У мінус число шуканих коефіцієнтів k, які визначаються по способу найменших квадратів

$$\mu = \sqrt{\frac{[VV]}{n-k}} \quad . \tag{3.1.1}$$

При апроксимації поліномом **m**-го порядку число коефіцієнтів **k** буде

$$k = m - 1. \tag{3.1.2}$$

Таким чином,

$$\mu = \sqrt{\frac{[VV]}{n-m-1}}. \tag{3.1.3}$$

Так, для поліному першого степеня

$$\mu = \sqrt{\frac{[VV]}{n-2}}, \tag{3.1.4}$$

для поліному другого степеня

$$\mu = \sqrt{\frac{[VV]}{n-3}}, \tag{3.1.5}$$

для поліному третього степеня

$$\mu = \sqrt{\frac{[VV]}{n-4}}. \tag{3.1.6}$$

І в нашому випадку

$$\mu = \sqrt{\frac{[VV]}{n-3}} = \sqrt{\frac{0,394269}{11-3}} = 0,222\,.$$

Приймаючи до уваги, що діагональні елементи оберненої матриці нормальних рівнянь представляють обернені ваги знайдених вище апроксимуючих коефіцієнтів,
тобто

$$\frac{1}{P_c} = 1,206061\,,$$

$$\frac{1}{P_b} = 0,176923077\,,$$

$$\frac{1}{P_a} = 0,001166 \quad ,$$

середні квадратичні похибки визначених коефіцієнтів емпіричної формули (2.1.9), розраховуються за формулами

………...

$$m_c = \mu\sqrt{\frac{1}{P_c}}, \tag{3.1.7}$$

$$m_b = \mu\sqrt{\frac{1}{P_b}}, \qquad (3.1.8)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, m_a = \mu\sqrt{\frac{1}{P_a}}., \qquad (3.1.9)$$

І в нашому випадку отримаємо

$$m_c = 0{,}222\sqrt{1{,}206061} = 0{,}244,$$

$$m_b = 0{,}222\sqrt{0{,}176923} = 0{,}093,$$

$$m_a = 0{,}222\sqrt{0{,}001166} = 0{,}0075\,.$$

Таблиця 4. Зведена таблиця оцінки точності апроксимуючих коефіцієнтів

	Оцінка точності зрівноважених коефіцієнтів			
	B	C	D	E
41	1/P	(1/P)^0,5	m(коефіц.)	
42	0,001166	0,034139437	0,007579	m(a)
43	0,176923	0,42062225	0,093378	m(b)
44	1,206061	1,098207907	0,243801	m(c)

Встановимо значимість t(a) коефіцієнта a за формулою

$$t(a) = \frac{a}{m_a}\ , \qquad (3.1.10)$$

і в нашому випадку

$$t_a = \frac{0{,}009033}{0{,}007579} = 1.192\,.$$

Значимість t(b) коефіцієнта b

$$t(b) = \frac{b}{m_b}\ , \qquad (3.1.11)$$

тобто

$$t_b = \frac{-0{,}78666}{0{,}093378} = -8.424\,.$$

Значимість t(c) коефіцієнта c

$$t(c) = \frac{c}{m_c}\ , \qquad (3.1.12)$$

і

$$t_c = \frac{8{,}974485}{0{,}243801} = 36.811\,.$$

І в нашому випадку

Табличне значення t-критерія Стьюдента, визначене на рівні значимості α=0,05 з k=n-m-1 степенями свободи знайдемо за формулою

=СТЬЮДРАСПОБР(0,05;8), (3.1.13)

і в нашому випадку t(0.95;8)= 2,306004.

...к як для коефіцієнтів b, c $t > t(0.95;8)$, то ці коефіцієнти ...ресії значимі, а значить і рівняння нелінійної регресії У по Х значимо.

В нашому випадку статистично незначимим виявляється коефіцієнт a .

Крім цього, для визначення адекватності побудованої математичної моделі експериментальним даним скористаємося F-критерієм Фішера

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots F = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-m-1}{m} . \qquad (3.1.11)$$

Згідно встановленого нами і приведеного вище ,коефіцієнт детермінації R^2 =0,99228, за формулою (3.1.11) отримаємо

$$F = \frac{0{,}99228}{1-0{,}99228} \cdot \frac{11-2-1}{2} = 514{,}13.$$

За формулою

=FРАСПОБР(0,05;2;8) (3.1.12)

отримали

F(0.05;2;8=4,45897 .

Приймаючи до уваги, що F>F(0.05;2;8) з надійністю 95% можна вважати, що коефіцієнт детермінації статистично значимий і включені в регресію фактори достатньо пояснюють стохастичну залежність показника.

Підвищити статистичну значущість коефіцієнтів моделі дає можливість використання сформульованої нами раніше [9,-с.112] теореми

Теорема 6. Якщо в емпіричні значення функції Y ввести абсолютні похибки зрівноваження, поділені на корінь

ABBYY PDF Transformer 3.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

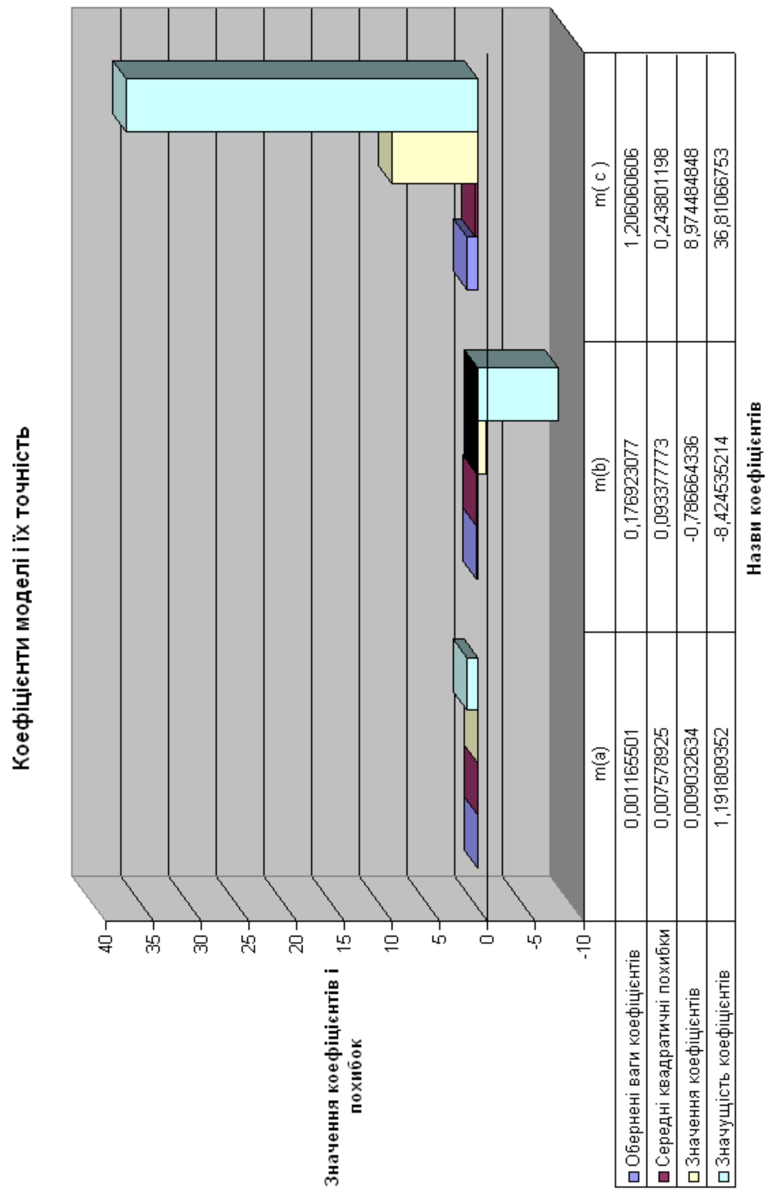
квадратний із відповідної ваги функції, взяті із попередн... го зрівноваження, то значно поліпшуються оцінки і характеристики в порівнянні з характеристиками попередньої моделі і отримана нова модель буде близькою до попередньої, що обумовлює адекватність її застосування.

Будуємо математичну модель при Y=Y+V/P^0.5

40	T	U	V	W	X
41	Конструювання моделі		Теор.6		
42		Y"=Y+V/P^0,5			
43	a	b	c	F(0,05;2;8)	4,45897
44	0,007738994	-0,7721827	8,941079	a,b,c,d	Коефіц.
45	0,004134907	0,05094501	0,133013	стандарт S	ai=S√dii
46	0,997695734	0,12111819	#Н/Д	R^2	μ
47	1731,910323	8	#Н/Д	Fкритерій	n-m-1
48	50,81292214	0,11735694	#Н/Д	[(Y'-Ycp)^2	[VV]
49	1,871624803	-15,15718	67,21961	t(0,05;8)=	2,306004

При повторному зрівноваженні значно покращились оцінки моделі . Так, середня квадратична похибка одиниці ваги числа продаж зменшилась майже вдвічі, збільшилось значення коефіцієнта детермінації R^2 і критерія Фішера F. Але при цьому значення статистичної значимості коефіцієнта «а» при X^2 все ще залишилось недостатнім. Це говорить про те, що таку модель цілком достатньо будувати поліномом першого степеня. Цікаво зрівноважити цю модель третій раз, ввівши нові обернені ваги зрівноваженої функції.

ABBYY PDF Transformer 3.0
Click here to buy
www.ABBYY.com



	m(a)	m(b)	m(c)
Обернені ваги коефіцієнтів	0,001165501	0,176923077	1,206060606
Середні квадратичні похибки	0,007578925	0,093377773	0,243801198
Значення коефіцієнтів	0,009032634	-0,786664336	8,974484848
Значущість коефіцієнтів	1,191809352	-8,424535214	36,81066753

3.2 Оцінка точності елементів зрівноваженої функції

Для поліному другого степеня

$$y' = ax^2 + bx + c \qquad (3.2.1)$$

запишемо систему нормальних рівнянь у символах Гауса

$$\begin{aligned} &[x^4]a + [x^3]b + [x^2]c - [xy^2] = 0, \\ &[x^3]a + [x^2]b + [x]c - [xy\ \ ] = 0, \\ &[x^2]a + [x\ \ ]b + n\ \ - [x] = 0\ \ , \end{aligned} \qquad (3.2.2)$$

Представимо матрицю коефіцієнтів нормальних рівнянь

$$N = \begin{bmatrix} [x^4] & [x^3] & [x^2] \\ [x^3] & [x^2] & [x\ \ ] \\ [x^2] & [x\ \ ] & n \end{bmatrix} . \qquad (3.2.3)$$

Таблиця 5. Коефіцієнти нормальних рівнянь

	$x^2]a$	$x\ ]b$	$x^0]$c	a
$[x^2$	$[x^4]a$	$[x^3]b$	$[x^2]c$	a
$[x$	$[x^3]a$	$[x^2]b$	$[x]c$	b
$[x^0$	$[x^2]a$	$[x\ ]b$	n	c

Обернена матриця

$$\underset{3x3}{Q} = N^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \qquad (3.2.4)$$

При цьому обернені ваги

$$\frac{1}{P_a} = Q_{11} = \frac{A_{11}}{D}\ ;\ \frac{1}{P_b} = Q_{22} = \frac{A_{22}}{D}\ ;\ \frac{1}{P_c} = Q_{33} = \frac{A_{33}}{D}\ ;$$

$$\frac{1}{P_{ab}} = Q_{12} = \frac{A_{12}}{D};\ \frac{1}{P_{ac}} = Q_{13} = \frac{A_{13}}{D}\ ; \qquad (3.2.5)$$

$$\frac{1}{P_{bc}} = Q_{23} = \frac{A_{23}}{D} .$$

де A_{ij} - алгебраїчні доповнення визначника D.

При цьому визначник D матриці коефіцієнтів нормальних рівнянь буде

$$D = \begin{vmatrix} [x^4] & [x^3] & [x^2] \\ [x^3] & [x^2] & [x\ \ ] \\ [x^2] & [x\ \ ] & n \end{vmatrix} . \qquad (3.2.6)$$

Виразимо алгебраїчні доповнення в частинних похідних

$$A_{11} = \begin{vmatrix} [x^2] & [x] \\ [x] & n \end{vmatrix} . \qquad (3.2.7)$$

При цьому

$$\left[\frac{\partial a}{\partial y}\right] = \frac{A_{11}}{D} . \qquad (3.2.8)$$

$$A_{12} = \begin{vmatrix} [x^3] & [x] \\ [x^2] & n \end{vmatrix} , \qquad (3.2.9)$$

$$\left[\frac{\partial a}{\partial y} \cdot \frac{\partial b}{\partial y}\right] = \frac{A_{12}}{D} , \qquad (3.2.10)$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} [x^3] & [x^2] \\ [x^2] & [x] \end{vmatrix} , \qquad (3.2.11)$$

$$\left[\frac{\partial a}{\partial y} \cdot \frac{\partial c}{\partial y}\right] = \frac{A_{13}}{D} , \qquad (3.2.12)$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} [x^4] & [x^2] \\ [x^2] & n \end{vmatrix} , \qquad (3.2.13)$$

$$\left[\frac{\partial b}{\partial y}\right] = \frac{A_{22}}{D} . \qquad (3.2.14)$$

$$A_{23} = \begin{vmatrix} [x^4] & [x^3] \\ [x^2] & [x] \end{vmatrix} , \qquad (3.2.15)$$

$$\left[\frac{\partial b}{\partial y} \cdot \frac{\partial c}{\partial y}\right] = \frac{A_{23}}{D} , \qquad (3.2.16)$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} [x^4] & [x^2] \\ [x^3] & [x^2] \end{vmatrix} , \qquad (3.2.17)$$

$$\left[\frac{\partial c}{\partial y}\right] = \frac{A_{33}}{D} , \qquad (3.2.18)$$

Слід відмітити, що виразами A_{ij} відмічені мінори, а не алгебраїчні доповнення.

Необхідно виразити середню квадратичну похибку зрівноваженої функції побудованої математичної моделі через середні квадратичні похибки, встановлених проце-дурою способу найменших квадратів і отриманих нами вище обернених ваг.

Спочатку сформулюємо теорему 1.

Теорема 1. Якщо знаходиться обернена вага зрівноваженої функції , то в подвоєних добутках обернених ваг 1/Pij на факторні ознаки необхідно змінювати знаки на протилежні в тому випадку, коли сума i+j відповідних індексів в обернених вагах є непарним числом, тобто слід

враховувати знаки при переході від мінорів до алгебраїчних доповнень.

Доказом цієї теореми буде порівняння результатів обчислень на основі розроблених автором двох різних способів знаходження середніх квадратичних похибок зрівноваженої функції.

При цьому, загальна формула середньої квадратичної похибки зрівноваженої функції буде

$$m_{y'_3} = \sqrt{m_a^2(x^2)^2 + m_b^2(x^1)^2 + m_c^2(x^0)^2 + 2\mu^2 \frac{(-A_{12}X^3 + A_{13}X^2 - A_{23}X^1}{D}} . \qquad (3.2.19)$$

або

$$m_{Y'_3} = \sqrt{m_a^2(x^2) + m_b^2(x)^2 + m_c^2 + 2\mu^2\left[\left(-\frac{1}{P_{12}}\right)x^3 + \left(\frac{1}{P_{13}}\right)x^2 + \left(-\frac{1}{P_{23}}\right)x^1\right]} , \qquad (3.2.20)$$

На основі формули (. 19) розписується контрольна формула середньої квадратичної похибки зрівноваженої функції n-го порядку.

Значення обернених ваг $1/P_{ij}$, які дорівнюють елементам Q_{ij} , але мають протилежні знаки відмічені відповідним кольором заливки.

Комп’ютерна формула має вигляд

=($H$32^2*(N3^2)+$I$32^2*(M3^2)+$J$32^2*(L3^2)+(2*$I$33^2)*($D$34*N3*M3+$D$33*N3*L3+$C$33*M3*L3))^0,5 (3.2.21)

Раціонально представити дані формули через елементи оберненої матриці

	Обернена матриця Q=N^ - 1			
	N	O	P	
22	Q11	Q12	Q13	c
23	Q21	Q22	Q23	b
24	Q31	Q32	Q33	a

І в нашому випадку отримуємо

1,206061	-0,41818	0,030303
-0,41818	0,176923	-0,01399
0,030303	-0,01399	0,001166

Формула середньої квадратичної похибки зрівноваженої функції через елементи Qij

$$m_{Y'_3} = \sqrt{m_a^2(x^2)^2 + m_b^2(x^2) + m_c^2 + 2\mu^2\left[Q_{12}x^2x + Q_{13}x^2 + Q_{23}x\right]} , \qquad (3.2.22)$$

В результаті розрахунку за формулами (.19),(.20), (.21), (.22) вектор середніх квадратичних похибок зрівноваженої функції m = m_{Dr} буде

0,1171183
0,0925746
0,0913253
0,0978826
0,1011155
0,0978826
0,0913253
0,0925746
0,1171183
0,1691306

В [4] реалізована формула оцінки точності функції зрівноважених величин у вигляді формули

$$\frac{1}{P_\varphi} = \varphi Q \varphi^T, \qquad (3.2.23)$$

де $\frac{1}{P_\varphi}$ - обернена вага зрівноваженої функції за способом найменших квадратів; φ - значення коефіцієнтів початкових рівнянь функції; φ^T – транспонована матриця коефіцієнтів : Q- обернена матриця коефіцієнтів нормальних рівнянь.

При цьому спочатку знаходиться допоміжна матриця

$$Q' = \varphi Q, \qquad (3.2.24)$$

а після построчно знаходиться матриця

$$\frac{1}{P_\varphi} = Q' \varphi^T. \qquad (3.2.25)$$

. Проблемі контролю оцінки точності функції зрівноважених величин присвячується даний розділ.

Таким чином, допоміжна обернена матриця Q' в нашому випадку розраховується за формулою

$$Q' = X * Q, \qquad (3.2.26)$$

тобто

=МУМНОЖ(L3:N13;B33:D35) , (3.2.27)

де матриця коефіцієнтів початкових рівнянь X(L3:N13)

1	**1**	1
1	**2**	4
1	**3**	9
1	**4**	16
1	**5**	25
1	**6**	36
1	**7**	49
1	**8**	64
1	**9**	81
1	**10**	100
1	**11**	121

а обернена матриця Q(B33:D35)

1,206061	-0,41818	0,030303
-0,41818	0,176923	-0,01399
0,030303	-0,01399	0,001166

І, в нашому випадку, отримали

	N	O	P
	Допоміжна матриця Q'=XQ		
	0,818182	-0,25524	0,017483
30	0,490909	-0,12028	0,006993
31	0,224242	-0,01329	-0,00117
32	0,018182	0,065734	-0,00699
33	-0,12727	0,116783	-0,01049
34	-0,21212	0,13986	-0,01166
35	-0,23636	0,134965	-0,01049
36	-0,2	0,102098	-0,00699
37	-0,10303	0,041259	-0,00117
38	0,054545	-0,04755	0,006993
39	0,272727	-0,16434	0,017483

В результаті розрахунку за формулою (.25) вектор обернених ваг зрівноваженої функції буде

1/P
0,58042
0,278322
0,173893
0,169231
0,194406
0,207459
0,194406
0,169231
0,173893
0,278322
0,58042

Корінь квадратний із обернених ваг зрівноваженої функції

(1/P)^0,5
0,761853
0,527562
0,417005
0,411377
0,440914
0,455477
0,440914
0,411377
0,417005
0,527562
0,761853

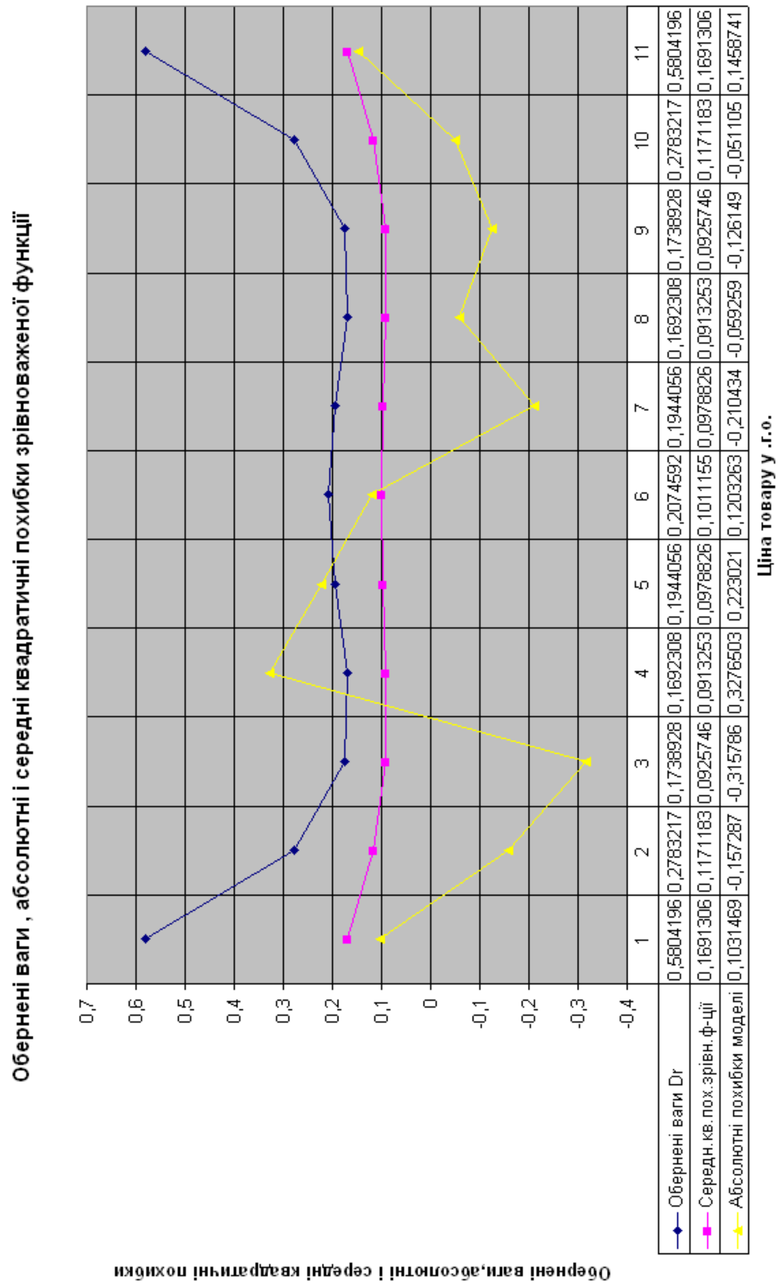
Перемноживши даний вектор на середню квадратичну похибку одиниці ваги μ, отримаємо вектор середніх квадратичних похибок зрівноваженої функції

m(p)
0,169131
0,117118
0,092575
0,091325
0,097883
0,101115
0,097883
0,091325
0,092575
0,117118
0,169131

Таким чином, в результаті розроблених нами формул, за двома різними методами отримані слідуючі результати

m(p)	Контроль
0,169131	0,1691306
0,117118	0,1171183
0,092575	0,0925746
0,091325	0,0913253
0,097883	0,0978826
0,101115	0,1011155
0,097883	0,0978826
0,091325	0,0913253
0,092575	0,0925746
0,117118	0,1171183
0,169131	0,1691306

що підтверджує коректність проведених нами досліджень і справедливість теореми 1.



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Обернені ваги Dr	0,5804196	0,2783217	0,1738928	0,1692308	0,1944056	0,2074592	0,1944056	0,1692308	0,1738928	0,2783217	0,5804196
Середн.кв.пох.зрівн.ф-ції	0,1691306	0,1171183	0,0925746	0,0913253	0,0978826	0,1011155	0,0978826	0,0913253	0,0925746	0,1171183	0,1691306
Абсолютні похибки моделі	0,1031469	-0,157287	-0,315786	0,3276503	0,223021	0,1203263	-0,210434	-0,059259	-0,126149	-0,051105	0,1458741

ВИСНОВКИ

1.По способу найменших квадратів побудована математична модель у вигляді емпіричної формули

$$\mathbf{Dr = 0.009033p^2 - 0.78666p + 8.974485.} \quad (2.1.15)$$

2.Отримана контрольна формула середньої квадратичної похибки зрівноваженої функції для поліному другого степеня

$$m_{Y'_3} = \sqrt{\begin{array}{l} m_a^2(x^2) + m_b^2(x)^2 + m_c^2 + \\ + 2\mu^2\left[\left(-\dfrac{1}{P_{12}}\right)x^3 + \left(\dfrac{1}{P_{13}}\right)x^2 + \left(-\dfrac{1}{P_{23}}\right)x^1\right] \end{array}}, \quad (3.2.20)$$

3. Дана формула дає можливість поширити її на оцінку точності поліномом будь-якого степеня.
4. Так як Fрозр.>Fтабл., то з надійністю P=0,95 можна вважати, що прийнята економетрична модель (2.1.15) відповідає експериментальним даним і її можна використовувати для економічного аналізу.
5. Оцінка максимального товарообігу в грошовому виразі відповідає ціні 6,41 у.г.о і дорівнює 27,59 у.г.о.
6. Оцінка максимального прибутку відповідає ціні P_4=7,5 у.г.о. і дорівнює 9,71 у.г.о при обсязі товару 4,3 у.г.о.
7. Максимальне значення оцінки товарообігу в грошовому виразі та максимальне значення прибутку досягаються при різних значеннях цін.

ABBYY PDF Transformer 3.0 Click here to buy www.ABBYY.com

ЛІТЕРАТУРНІ ДЖЕРЕЛА

1.Бугір М.К. Математика для економістів.Посібник.-К.:Видавничий центр «Академія»,2003,-520 с.

2. Валецький О.О.,Джунь Й.В.Методи створення послідовностей рівномірно розподілених випадкових чисел та їх застосування. // Збірник наукових праць викладачів та студентів факультету кібернетики МЕГУ. Рівне: Тетіс, 2008,-с.66-69.

3. Джунь Й.В., Валецький О.О. Про одну невідому особливість числа π.// Збірник наукових праць викладачів та студентів факультету кібернетики МЕГУ. Рівне: Тетіс, 2008,-с.59-65.

4. Джунь Й.В., Валецький О.О. Про нову, невідому властивість числа π .//Тези доповіді на X Міжнародній конференції «Економічні та гуманітарні проблеми розвитку суспільства у ІІІ тисячолітті». Рівне 3-5.10.2007 р.

5.Дьяконов В.П. Справочник по алгоритмам и программам на языке БЕЙСИК для персональних ЭВМ.-М. Наука, 1989,-240 с.

6.Ермаков С.М.,Михайлов Г.А. Курс статистического моделирования.-М.: Наука, 1976,- 319 с.

7. Літнарович Р.М. Побудова і дослідження економіко-математичної моделі поліномом m-го порядку.Вісник МЕГУ.Збірник наукових праць.Серія: Системні науки та кібернетика. Випуск 1.МЕГУ, Рівне,2009.- с.41-51.

8. Літнарович Р.М. Застосування способу найменших квадратів до обробки матеріалів психологічних і педагогічних експериментів. Частина 2. Курс лекцій. МЕГУ, Рівне, 2007.-110 с.

9. Літнарович Р.М. Конструювання і дослідження математичних моделей. Множинний аналіз. Частина 1. МЕГУ, Рівне, 2009.-127с.

10. Літнарович Р.М. Конструювання і дослідження математичних моделей. Поліноміальна апроксимація. Частина 2. МЕГУ, Рівне, 2009.-36с.

11. Літнарович Р.М. Конструювання і дослідження математичних моделей. Онтодидактика поліноміальної апроксимації. Частина 3. МЕГУ, Рівне, 2009.-32с.

12. Літнарович Р.М. Конструювання і дослідження математичних моделей. Побудова і дослідження істинної моделі якості засвоєння базової дисципліни. Апроксимація поліномом першого степеня. Частина 4. МЕГУ, Рівне, 2009.-43с.

13. Літнарович Р.М. Конструювання і дослідження математичних моделей. Теоретико-методологічні основи побудови математичної моделі базової дисципліни в рамках роботи наукової школи. Частина 5. МЕГУ, Рівне, 2009.-100с.

14. 11. Літнарович Р.М. Конструювання і дослідження математичних моделей. Модель пункту GPS спостережень. Частина 6. МЕГУ, Рівне, 2009.-104с.

15.Літнарович Р.М., Кравцов М.І. До питання оцінки точності визначення координат пункту із GPS спостережень. Інженерна геодезія. Вип. 50, К.:КНУБА, 2004,-с.125…134.

16. Літнарович Р.М. Основи космічної геодезії.Лабораторний практикум . ЧДІЕіУ, Чернігів, 2002.-90 с.

17. Літнарович Р.М., Кравцов М.І. Перехід від геодезичних координат загально земного еліпсоїда до плоских конформних Гаусса-Крюгера.Новітні досягнення геодезії, геоінформатики та землевпорядкування.- Європейський досвід. ЧДІЕіУ, Чернігів, 2005,-с.44…49.

18. Методичні вказівки до лабораторної роботи на тему:”Визначення координат пункту за виміряними псевдо відстанями , отриманими із GPS спостережень” для студентів всіх спеціальностей геодезичного факультету Державного університету «Львівська політехніка» /укладення А.Т.Дульцев, І.М.Цюпак.- Львів: ДУ «Львівська політехніка», 1977,- 20 с.

19.Ромакин М.И. Математический аппарат оптимизационных задач.-М.:Статистика, 1975,112 с.

20. Ржевский С.В.,Александрова В.М. Дослідження операцій. Підручник.- К.:” Академвидав“, 2006,-560 с.

21. Программирование, отладка и решение задач на ЭВМ единой серии. Язык Фортран. Учебн. Пособие для вузов/И.А.Кудряшов,Н.Х.Кушнер, Л.В. Петрова,Н.А.Силов; Под ред.И.А.Кудряшева.-Л.:Энергоатомиздат,1988,-208 с.

22. Тойберт П. Оценка точности результатов измерений: пер. с нем. – М.: Энергоатомиздат, 1988,-88 с.

23.ТолбатовЮ.А.Економетрика.Тернопіль.Видавництво «Підручники і посібники »,2008,-288 с.

24. Якимчук А.Й.Побудова і дослідження математичної моделі пункту GPS спостережень методом статистичних випробувань Монте Карло. Множинний регресійний аналіз . Модель ДА – 50. МЕГУ, Рівне, 2010, -112 с.

Л і т н а р о в и ч Руслан Миколайович,

доцент,кандидат технічних наук

Р.М.ЛІТНАРОВИЧ

ОСНОВИ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

АНАЛІЗ ІНДИВІДУАЛЬНОГО РИНКУ

Наукове видання

Комп’ютерний набір, верстка і макетування та дизайн в редакторі Microsoft®Office® Word 2003 Р.М. Літнарович

Міжнародний економіко-гуманітарний університет

ім.акад. Степана Дем’янчука

Кафедра математичного моделювання

33027,м.Рівне,Україна
Вул.акад. С.Дем’янчука,4, корпус 1
Телефон:(+00380) 362 23-73-09
Факс:(+00380) 362 23-01-86
E-mail:mail@regi.rovno.ua